Otto Hamborg
Bismarckstraße 106
10625 Berlin
Tel. 030 - 313 67 65
hamborg-berlin@t-online.de

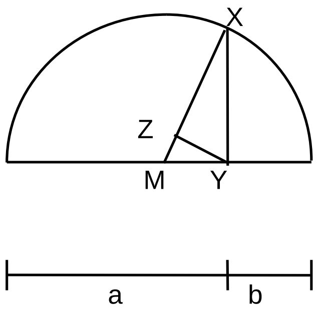
14. November 1995

Analogie- bzw. Symmetriebetrachtungen zum arithmetischen und harmonischen Mittel*

Den folgenden Ausführungen liegt die Absicht zugrunde, das arithmetische und harmonische Mittel unter dem Aspekt von Ähnlichkeit und Gleichwertigkeit darzustellen. In diesem Zusammenhang werden daher Begriffe wie Analogie und Symmetrie zur Interpretation der Beziehungen zwischen den beiden Mitteln im Vordergrund stehen. Auf eine im mathematischen Sinn präzise Definition dieser Begriffe soll allerdings verzichtet werden.

Bei der üblichen Herleitung und Darstellung des bekannten geometrischen und algebraischen Sachverhaltes wird das geometrische Mittel als „verbindendes“ drittes mit einbezogen.

I.



Arithmetisches Mittel: $A(a, b) = \frac{1}{2}(a + b) = \overline{MX}$

Geometrisches Mittel: $G(a, b) = \sqrt{ab} = \overline{XY}$

Harmonisches Mittel: $H(a, b) = 2\frac{ab}{a+b} = \overline{XZ}$

Nach Definition, bzw. Konstruktion gilt:

$\boxed{H : G = G : A}$ und $\boxed{H \leq G \leq A}$

Grundlegend für alle weiteren Betrachtungen ist die als formaler Ausdruck für analoge und symmetrische Korrespondenzen zu verstehende Symbolkette

II. **X Y <—> Y' X'**

oder allgemein **... X Y Z ... <—> ... Z' Y' X' ...**

Zusammen mit den beiden erwähnten Begriffen wird dieser formale Ausdruck offensichtlich auch durch die Kommutativität charakterisiert. Er stellt zunächst nur ein allgemeines Zeichenschema dar, das erst durch die Zuordnung zu definierten Symbolen eine Bedeutung erhält. In den verschiedenen und mehrdeutigen Zuordnungsmöglichkeiten mag dann der vereinheitlichende Aspekt und Wert der formalen Symbolkette gesehen werden. Konkrete geometrische und algebraische Fragestellungen sollen dabei in den Hintergrund treten und vorwiegend der formale Aufbau und Zusammenhang der mathematischen Ausdrücke des arithmetischen und harmonischen Mittels zur Diskussion stehen. In dem angesprochenen Sinn führen Ähnlichkeit und Gleichwertigkeit, bzw. Analogie und Symmetrie auf die Zuordnungen :

III. **... X Y Z ... <—> ... Z' Y' X' ...**

a) $H \leq G \leq A$

b) $H : G = G : A$

c) $G : H = A : G$

d) $H \cdot A = G \cdot G = A \cdot H$

* Der Pythagoreer Archytas von Tarent (428–365) verfasste eigens eine *Arithmetica Universalis*, die auf den drei Grundannahmen des arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittels aufbaute, um so auch mathematisch die Einheit von Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik zu begründen. (*Mainzer, Klaus*: Geschichte der Geometrie (1980))

Die Ungleichung III a) zeigt das geometrische Mittel eingeschlossen durch das harmonische und das arithmetischen. Aufgrund dieser Eigenschaft läßt sich das geometrische Mittel $G(a, b) = \sqrt{ab}$ zweier Zahlen a und b nach dem schon in der Antike bekannten Iterationsverfahren* approximativ bestimmen. Es steht sozusagen inmitten zweier immer enger werdender Grenzen, die sich aus den beiden anderen Mitteln fortlaufend errechnen. Dagegen kann in III b), c) - besonders im Hinblick auf die weiteren Ausführungen - das Paar

$$\text{harmonisches Mittel} \quad H(a, b) = 2\frac{ab}{a+b}$$

$$\text{arithmetisches Mittel} \quad A(a, b) = \frac{a+b}{2}$$

als im Vordergrund stehend angesehen werden, das seine Korrespondenz durch das verbindende dritte Mittel $G(a, b)$ erhält. Dem entspricht die Konstruktion am Halbkreis und, anhand der Gleichungen, die Berechnung von $H(a, b)$ aus $A(a, b)$ über die Zwischenstufe $G(a, b)$, bzw. $(G(a, b))^2$. Da von den beiden algebraischen Ausdrücken $H(a, b)$ und $A(a, b)$ der letztere als einfacher und elementarer erscheint, kann man hier von einer gewissen formalen Asymmetrie sprechen. Dem entspricht, dass die Konstruktion von $A(a, b)$ aus $H(a, b)$ umständlicher sein dürfte als umgekehrt.

Der wesentliche Punkt der Symmetriebetrachtungen zum arithmetischen und harmonischen Mittel ist nun der, dass man im Schema von III weitere Zeilen hinzufügen kann, die einerseits das geometrische Mittel nicht enthalten, aber es andererseits formal so ersetzt wird, dass eine direkte Korrespondenz zu III a - d besteht. Um den dadurch direkteren Bezug von $A(a, b)$ und $H(a, b)$ herzustellen, werden anstelle der Proportionen von Zahlen, bzw. Produkte von Zahlen und ihren Kehrwerten <u>Kompositionen von Operationen</u> betrachtet. [Im Folgenden werden die Begriffe Operation, Operator als Synonyme für Abbildungen (nach der gängigen mathematischen Definition) verwendet.]

IV. a) (Definition):

$\Sigma(x, y) = x + y$		Summe
$K_1(x) = \frac{1}{x}$,	$K_2(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$	Kehrwert
$id_1(x) = x$;	$id_2(x, y) = (x, y)$	Identität
$\Delta(x) = (x, x)$		identische Verdoppelung
$\nabla(x) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right)$		id. Verdoppelung des Kehrwertes

Mit der Schreibweise der Komposition von Operationen (Nacheinanderausführung von Abbildungen)
f und g gemäß $f(g(x)) = f \circ g(x)$
und der abkürzenden Operatorschreibweise für $f \circ g(x) = h(x)$
durch $f \circ g = h$
erhält man aus der Definition IV. a)

IV. b) (Folgerung)

$$K_1 \circ K_1 = id_1 \quad ; \quad K_2 \circ K_2 = id_2$$

$$\Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ \nabla = id_1$$

$$\Delta \circ K_1 = K_2 \circ \Delta = \nabla = K_2 \circ \nabla \circ K_1$$

Bemerkung:
Aufgrund der Assoziativität der Komposition von Operationen, d.h. (f o g) h = f o (g o h), können die Klammern in den Operatorketten beliebig gesetzt und somit auch weggelassen werden.

---

* Archytas von Tarent (um 400 v.Chr.), ein Freund Platons

Die Zerlegung von H (a , b) und A (a , b) in die elementaren Operationen aus IV. a) führt zu:

$$H(a,b) = 2\,\frac{ab}{a+b} \;=\; \Sigma\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right) = \Sigma\;\Delta\left(\left(\frac{ab}{a+b}\right)\right) = \Sigma\;\Delta\,K_1\left(\left(\frac{a+b}{ab}\right)\right)$$

$$= \Sigma\left(\Delta\left(K_1\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right)\right) = \Sigma\;\Delta\left(K_1\;\Sigma\left(\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)\right)\right)$$

$$= \Sigma(\Delta(K_1(\Sigma(K_2(a,b)))))$$

$$= \Sigma \circ \Delta \circ K_1 \circ \Sigma \circ K_2\;(a,b)$$

V. $\boxed{H \;=\; \Sigma \circ \Delta \circ K_1 \circ \Sigma \circ K_2}$

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2} \;=\; K_1\left(\frac{2}{a+b}\right) = K_1\left(\Sigma\left(\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+b}\right)\right) = K_1\;\Sigma\left(\Delta\left(\left(\frac{1}{a+b}\right)\right)\right)$$

$$= K_1(\Sigma(\Delta(K_1(a+b)))) \;=\; K_1(\Sigma(\Delta(K_1(\Sigma(a,b)))))$$

$$= K_1 \circ \Sigma \circ \Delta \circ K_1 \circ \Sigma\;(a,b)$$

VI. $\boxed{A \;=\; K_1 \circ \Sigma \circ \Delta \circ K_1 \circ \Sigma}$

Somit führen die Zerlegungen in elementare Bestandteile zu der Korrespondenz

VII.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} H = \Sigma \circ \Delta \circ K_1 \circ \Sigma \circ K_2 & \longleftrightarrow & K_1 \circ \Sigma \circ \Delta \circ K_1 \circ \Sigma = A \\ Y \circ K_2 & \longleftrightarrow & K_1 \circ Y \\ X & \longleftrightarrow & X' \end{array}}$$

Durch Einsetzen von $\Delta \circ K_1 = K_2 \circ \Delta$ in die linke, bzw. rechte Seite von VII folgen zwei Darstellungen der beiden Mittel, deren Symmetrie eine mathematisch und physikalisch aussagekräftige Interpretation ermöglichen.

VIII.a

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \Sigma \circ K_2 \circ \Delta \circ \Sigma \circ K_2 & \longleftrightarrow & K_1 \circ \Sigma \circ \Delta \circ K_1 \circ \Sigma \\ X \circ \Delta \circ X & \longleftrightarrow & X' \circ \Delta \circ X' \end{array}}$$

VIII.b

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \Sigma \circ \Delta \circ K_1 \circ \Sigma \circ K_2 & \longleftrightarrow & K_1 \circ \Sigma \circ K_2 \circ \Delta \circ \Sigma \\ \Sigma \circ \Delta \circ X & \longleftrightarrow & X \circ \Delta \circ \Sigma \end{array}}$$

Die Umformung von VII zu VIII.a, bzw. VIII. b bedeutet einen Schritt zu höherer Symmetrie in zwei komplementär zueinander stehende Richtungen: Höhere Symmetrie der Teile zu Ungunsten des Ganzen und höhere Symmetrie des Ganzen zu Ungunsten der Teile.

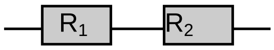
Zu VIII.a: Hier erhalten die beiden Seiten selbst eine symmetrische Gestalt, unterscheiden sich aber durch die Operationen $X = \Sigma \circ K_2$ und $X' = K_1 \circ \Sigma$.
Der Unterschied von $X = \Sigma \circ K_2$ und $X' = K_1 \circ \Sigma$ ist insofern sogar maximal, als er ein grundsätzliches Verbot beim Rechnen mit (reellen) Zahlen darstellt.

$$\Sigma \circ K_2 \;:\; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \neq \frac{1}{x+y} \;:\; K_1 \circ \Sigma\,, \text{ für } x, y \neq 0$$

Zu VIII.b: Dagegen sind hier die beiden Seiten selbst nicht symmetrisch aufgebaut, aber aus denselben Operationen spiegelsymmetrisch zueinander zusammengesetzt.

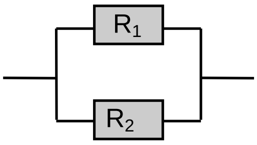
Die Zerlegungen in VIII.b stellen Ausdrücke dar, die direkt physikalisch interpretiert werden können, und zwar durch die Reihen- und Parallelschaltung zweier ohmscher Widerstände.

IX. a)

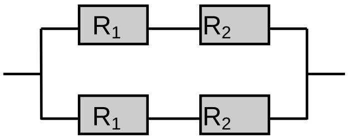


$$R_r = R_1 + R_2 = \Sigma (R_1 , R_2)$$

IX. b)

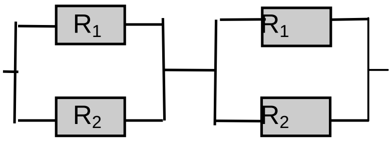


$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = K_1 \text{ o } \Sigma \text{ o } K_2 (R_1 , R_2)$$



$$R_A = \frac{(R_1 + R_2) (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2) + (R_1 + R_2)} = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

$$= K_1 \text{ o } \Sigma \text{ o } K_2 \text{ o } \Delta \text{ o } \Sigma (R_1, R_2)$$



$$R_H = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$= \Sigma \text{ o } \Delta \text{ o } K_1 \text{ o } \Sigma \text{ o } K_2 (R_1, R_2)$$

Die Korrespondenz der beiden Mittel $A = R_A$ und $H = R_H$ läßt sich also auch durch den Begriff der Kommutativität formal und anschaulich charakterisieren. In der oben angeführten physikalischen Realisierung folgt aufgrund einer direkten sprachlichen Übersetzung der Schaltbilder:

$A = R_A =$	Parallelschaltung	zweier gleicher	Reihenschaltungen
	$K_1 \text{ o } \Sigma \text{ o } K_2$	Δ	Σ
$H = R_H =$	Reihenschaltung	zweier gleicher	Parallelschaltungen
	Σ	Δ	$K_1 \text{ o } \Sigma \text{ o } K_2$

Nun folgt der Schritt von der Korrespondenz

$$H \longleftrightarrow A$$
$$X \longleftrightarrow X'$$

zur Gleichung $\quad Y\, X = X'\, Y'$

bzw. $\quad X\, Y = Y'\, X'$.

Wegen $\Delta \text{ o } K_1 = K_2 \text{ o } \Delta = \nabla = K_2 \text{ o } \nabla \text{ o } K_1$ (IV. b) folgen aus z.B. VII die Gleichungen

X.

$$\boxed{\begin{array}{lll} & K_1 \text{ o } H = K_1 \text{ o } \Sigma \text{ o } K_2 \text{ o } \Delta \text{ o } \Sigma \text{ o } K_2 & = A \text{ o } K_2 \\ \textbf{a)} & K_1 \text{ o } H = K_1 \text{ o } \Sigma \text{ o } K_2 \text{ o } \nabla \text{ o } K_1 \text{ o } \Sigma \text{ o } K_2 & = A \text{ o } K_2 \\ \textbf{b)} & K_1 \text{ o } H = K_1 \text{ o } \Sigma \text{ o } \nabla \text{ o } \Sigma \text{ o } K_2 & = A \text{ o } K_2 \\ \textbf{c)} & H \text{ o } K_2 = \Sigma \text{ o } \nabla \text{ o } \Sigma & = K_1 \text{ o } A \end{array}}$$

Aufgrund dieser Darstellung des harmonischen und arithmetischen Mittels ergibt sich also eine weitere Interpretation ihrer Korrespondenz. Sie sind aus derselben Operatorkette gebildet, wobei sie jeweils als das Komplement der Kehrwertoperationen K_1, bzw. K_2 erscheinen.

Harm. Mittel

XI. [X. b)] $$K_1 \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ K_2$$

Arithm. Mittel

Nun werden noch die beiden Mittel A und H in die Form einer Operatorgleichung gebracht, die analog zur Gleichung $H \cdot A = G \cdot G$, aufgebaut ist.

Aus der Darstellung von H und A in XI erhält man wegen $\nabla = K_2 \circ \nabla \circ K_1$, $\Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ \nabla = id_1$

$$H \circ \nabla \circ A = (\Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ K_2) \circ \nabla \circ (K_1 \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma)$$

$$H \circ \nabla \circ A = (\Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ (K_2 \circ \nabla \circ K_1)) \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma$$

$$= \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \qquad = H \circ K_2 = K_1 \circ A \quad \text{[X. c)]}$$

XII. kurz: $\boxed{H \ \square \ A \ = \ X \ \square \ X}$ $\quad X = \Sigma$ = Reihenschaltung [IX. a)]

und entsprechend

$$A \circ \nabla \circ H = (K_1 \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma) \circ \nabla \circ (\Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ K_2)$$

$$A \circ \nabla \circ H = K_1 \circ (\Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ \nabla) \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ K_2$$

$$= K_1 \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ K_2 \qquad \text{[X. b)]}$$

$$= (K_1 \circ \Sigma \circ K_2) \circ \nabla \circ (K_1 \circ \Sigma \circ K_2) = A \circ K2 = K1 \circ H \qquad \text{[X. a)]}$$

XIII. kurz: $\boxed{A \ \square \ H \ = \ X' \ \square \ X'}$ $\quad X' = K_1 \circ \Sigma \circ K_2$ = Parallelschaltung [IX. b)]

Die Verknüpfung $\square = \circ \nabla \circ$ ist nur für den trivialen Fall A = H kommutativ. (Nichtkommutativität der Komposition von Operationen, d.h., im Allgemeinen gilt $f \circ g \neq g \circ f$). Man erhält also eine zu III. d) analoge Korrespondenz.

XIV. $\boxed{H \square A = X \square X = K_1 \circ A \longleftrightarrow K_1 \circ H = X' \square X' = A \square H}$

Zusammenfassende Darstellung von III, X und XIV:

$$H \leq G \leq A$$

$$H : G = G : A$$

$$G : H = A : G$$

$$H \cdot A = G \cdot G \longleftrightarrow G \cdot G = A \cdot H$$

$$\boxed{\mathbf{\dots\ X\ \ Y\ \ Z \dots \longleftrightarrow \dots Z'\ \ Y'\ \ X' \dots}}$$

$$H \circ K_2 = K_1 \circ A = H \square A = X \square X \leq X' \square X' = A \square H = K_1 \circ H = A \circ K_2$$

$$K_1 \circ H = K_1 \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ K_2 = A \circ K_2$$

$$H \circ K_2 = \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma = K_1 \circ A$$

Aufgrund und mit Hilfe der elementaren Operationen und ihrer Komposition könnte man nun z.B. der folgenden Verallgemeinerung nachgehen:

Es sei $\Sigma(x, y) = x + y$

ersetzt durch die gewichtete Summe $\Sigma_{p,q}(x, y) = px + qy$.

Damit ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel

$$A = K_1 \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma$$

der Ausdruck $A_{p,q} = K_1 \circ \Sigma_{p,q} \circ \nabla \circ \Sigma_{p,q}$.

Wegen $A_{p,q}(x, y) = \dfrac{px + qy}{p + q}$

kommt man also zur Formel für die Teilung einer Strecke der Länge (b - a) im Verhältnis p : q für $a = x \leq y = b$.

Analog erhält man $H_{p,q} = \Sigma_{p,q} \circ \nabla \circ \Sigma_{p,q} \circ K_2$

$$H_{p,q}(x, y) = \frac{p + q}{px + qy} xy$$

und schließlich als eine Verallgemeinerung des geometrischen Mittels

$$G_{p,q} = \sqrt{A_{p,q} \cdot H_{p,q}}$$

den Ausdruck $G_{p,q}(x, y) = \sqrt{\dfrac{px + qy}{py + qx} xy}$

Allgemeine Bemerkung:
Die vorgestellten Betrachtungen sind in erster Linie im Rahmen von Meditation und Mnemotechnik hinsichtlich mathematischer Gegenstände anzusiedeln. So läßt sich auch der Anfang und das Ende des Weges von den Fibonacci-Zahlen zur Gleichung des Goldenen Schnittes zusammenfassend als Vertauschung von Indizes und Exponenten analog und symmetrisch darstellen.

a_0, a_1 beliebig, aber fest vorgegeben

$$\begin{array}{ccccc} a_{n+2} & = & a_{n+1} & + & a_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s^{n+2} & = & s^{n+1} & + & s^n \end{array}$$

$$s = ½\left(1 + \sqrt{5}\right)$$