

Komplexe Zahlen

Aufgabe 2.8: Bestimmen Sie den Betrag, den Real- und den Imaginärteil der komplexen Zahlen. Weiterhin sind die Eulersche und trigonometrische Darstellung der komplexen Zahlen gesucht.

$$(1) \frac{1+i}{-1+i} \quad (2) \frac{1}{-2+5i} \quad (3) \frac{-3+2i}{2-i} \quad (4) (1+2i)^4.$$

Aufgabe 2.9: Berechnen Sie

$$z_1 + z_2, \quad |z_1|, \quad |z_2|, \quad \bar{z}_1, \quad \bar{z}_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad (z_1)^{20}, \quad \sqrt[4]{z_2}, \quad \text{wobei}$$

$$(1) \quad z_1 = 3 + 4i, \quad z_2 = -2 + 5i \quad (2) \quad z_1 = -3 + i, \quad z_2 = 4 + 2i$$

$$(3) \quad z_1 = e^{2i} \quad z_2 = 3e^{-5i} \quad (4) \quad z_1 = 5e^{1,5i} \quad z_2 = 4e^{2i}.$$

Aufgabe 2.10: Lösen Sie folgende Gleichungen.

$$(1) \quad 2x^2 - x + 6 = 0 \quad (2) \quad x^4 + 2 = 0 \quad (3) \quad x^4 + x^2 + 3 = 0.$$

Aufgabe 2.11: Zeichnen Sie in der komplexen Zahlenebene folgende Mengen.

$$(1) \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| \leq 2\} \quad (2) \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| = 2\}$$

$$(3) \quad \{z \in \mathbb{C} \mid z \cdot \bar{z} = 4\} \quad (4) \quad \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \operatorname{Im}(z - 2) \leq 5\}$$

$$(5) \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z - 2) \leq 5\}.$$

Lösungen:

2.8: (1) $|z| = 1, \quad \operatorname{Re}(z) = 0; \quad \operatorname{Im}(z) = -1, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2},$
 $z = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$

(2) $|z| = \frac{1}{\sqrt{29}}, \quad \operatorname{Re}(z) = -\frac{2}{29}, \quad \operatorname{Im}(z) = -\frac{5}{29}, \quad \varphi = -1,9513,$
 $z = \frac{1}{\sqrt{29}} e^{-i1,9513} = \frac{1}{\sqrt{29}} \left(\cos(-1,9513) + i \sin(-1,9513) \right),$

(3) $|z| = \sqrt{\frac{13}{5}}, \quad \operatorname{Re}(z) = -\frac{8}{5}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{5}, \quad \varphi = 3,0172,$
 $z = \sqrt{\frac{13}{5}} e^{i3,0172} = \sqrt{\frac{13}{5}} \left(\cos(3,0172) + i \sin(3,0172) \right),$

(4) $|z| = 25, \quad \operatorname{Re}(z) = -7, \quad \operatorname{Im}(z) = -24, \quad \varphi = -1,8546,$
 $z = 25 e^{-i1,8546} = 25 \left(\cos(-1,8546) + i \sin(-1,8546) \right).$

:

- 2.9:** (1) $z_1 + z_2 = 1 + 9i$, $|z_1| = 5$, $|z_2| = \sqrt{29}$, $\bar{z}_1 = 3 - 4i$,
 $\bar{z}_2 = -2 - 5i$, $z_1 \cdot z_2 = -26 + 7i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{14}{29} - \frac{23}{29}i$,
 $(z_1)^{20} = 10^{13}(9, 1004 - 2, 8516i)$,
 $(\sqrt[4]{z_2})_{*0} = 1, 3457 + 0, 7140i$, $(\sqrt[4]{z_2})_{*1} = -0, 7140 + 1, 3457i$,
 $(\sqrt[4]{z_2})_{*2} = -1, 3457 - 0, 7140i$, $(\sqrt[4]{z_2})_{*3} = 0, 7140 - 1, 3457i$,
- (2) $z_1 + z_2 = 1 + 3i$, $|z_1| = \sqrt{10}$, $|z_2| = \sqrt{20}$, $\bar{z}_1 = -3 - i$,
 $\bar{z}_2 = 4 - 2i$; $z_1 \cdot z_2 = -14 - 2i$, $\frac{z_1}{z_2} = -0, 5 + 0, 5i$,
 $(z_1)^{20} = 10^{10}(0, 9885 - 0, 1512i)$,
 $(\sqrt[4]{z_2})_{*0} = 1, 4445 + 0, 1682i$, $(\sqrt[4]{z_2})_{*1} = -0, 1682 + 1, 4445i$,
 $(\sqrt[4]{z_2})_{*2} = -1, 4445 - 0, 1682i$, $(\sqrt[4]{z_2})_{*3} = 0, 1682 - 1, 4445i$,
- (3) $z_1 + z_2 = 0, 4348 + 3, 7861i$, $|z_1| = 1$, $|z_2| = 3$,
 $\bar{z}_1 = \cos(2) - \sin(2)i$, $\bar{z}_2 = 3 \cos(5) + 3 \sin(5)i$,
 $z_1 \cdot z_2 = -2, 9700 - 0, 4234i$, $\frac{z_1}{z_2} = 0, 2513 + 0, 2190i$,
 $(z_1)^{20} = -0, 6669 + 0, 7451i$,
 $(\sqrt[4]{z_2})_{*0} = 0, 4150 - 1, 2489i$, $(\sqrt[4]{z_2})_{*1} = -1, 2489 - 0, 4150i$,
 $(\sqrt[4]{z_2})_{*2} = -0, 4150 + 1, 2489i$, $(\sqrt[4]{z_2})_{*3} = 1, 2489 + 0, 4150i$,
- (4) $z_1 + z_2 = -1, 3109 + 8, 6247i$, $|z_1| = 5$, $|z_2| = 4$,
 $\bar{z}_1 = 0, 3537 - 4, 9875i$, $\bar{z}_2 = -1, 6646 - 3, 6372i$,
 $z_1 \cdot z_2 = -18, 7291 - 7, 0157i$, $\frac{z_1}{z_2} = 1, 0970 - 0, 5993i$,
 $(z_1)^{20} = 10^{13}(1, 4711 - 9, 4226i)$,
 $(\sqrt[4]{z_2})_{*0} = 1, 2411 + 0, 6780i$, $(\sqrt[4]{z_2})_{*1} = -0, 6780 + 1, 2411i$,
 $(\sqrt[4]{z_2})_{*2} = -1, 2411 - 0, 6780i$, $(\sqrt[4]{z_2})_{*3} = 0, 6780 - 1, 2411i$.

- 2.10:** (1) $z_1 = 0, 25 - 1, 7139i$, $z_2 = 0, 25 + 1, 7139i$,
(2) $z_1 = 0, 8409 + 0, 8409i$, $z_2 = -0, 8409 + 0, 8409i$,
 $z_3 = -0, 8409 - 0, 8409i$, $z_4 = 0, 8409 - 0, 8409i$,
(3) $z_1 = 0, 7849 + 1, 0564i$, $z_2 = +0, 7849 - 1, 0564i$,
 $z_3 = -0, 7849 - 1, 0564i$, $z_4 = -0, 7849 + 1, 0564i$.

- 2.11:** (1) Kreisfläche und -linie mit Mittelpunkt (3;0) und Radius 2,
(2) Kreislinie mit dem Mittelpunkt (-1;0) und dem Radius 2,
(3) Kreis mit dem Mittelpunkt (0;0) und dem Radius 2.

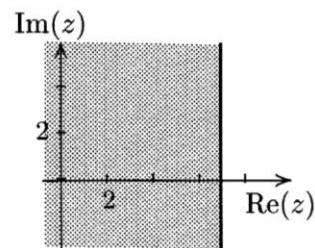
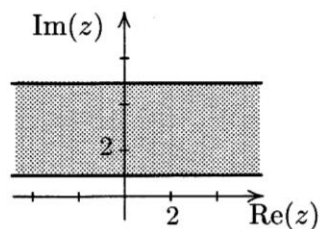


Bild: zu Aufgabe 2.11 (4) und (5) .