Determinanten

Aufgabe 4.14: *Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.15: *Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad B_2 = \begin{pmatrix} \sin(x) & -\cos(x) \\ \cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.16: *Gegeben sind die Vektoren*

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{und} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe von Determinanten $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c} \times \vec{b}$ *und* $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$.

Aufgabe 4.17: *Es sei* A *eine Matrix vom Typ* (n,n). *Was kann man mit Hilfe der Determinante* $|A|$ *über die eindeutige Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems* $AX = B$ *aussagen?*

Aufgabe 4.18: *Liegen die folgenden Vektoren in einer Ebene?*

$$(1) \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.19: *Stellen Sie, falls möglich, den Vektor* $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *als Linearkombination der Vektoren aus Aufgabe 4.18 dar.*

Lösungen:

4.14: $|A_1| = 10$, $|A_2| = -4$. **4.15:** $|B_1| = -43$, $|B_2| = 1$.

4.16: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{c} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -16 \\ -6 \end{pmatrix}$, $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = 30$.

4.17: $(AX = B \text{ ist eindeutig lösbar}) \Longleftrightarrow (|A| \neq 0)$. ⇒

4.18: (1) Ja (2) Nein

4.19: $\vec{c}$ bzgl. (1) nicht darstellbar, für (2) gilt: $\vec{c} = \frac{23}{11}\vec{b}_1 - \frac{28}{11}\vec{b}_2 - \frac{4}{11}\vec{b}_3$.