

Erstes (Roh-)Material zum Projekt:

Historisch orientierter Mathematik-"Brückenkurs"

nicht nur für Anfänger

Programm:

Darstellung der *Quadratura Arithmetica* von G. W. Leibniz in moderner Schreibweise

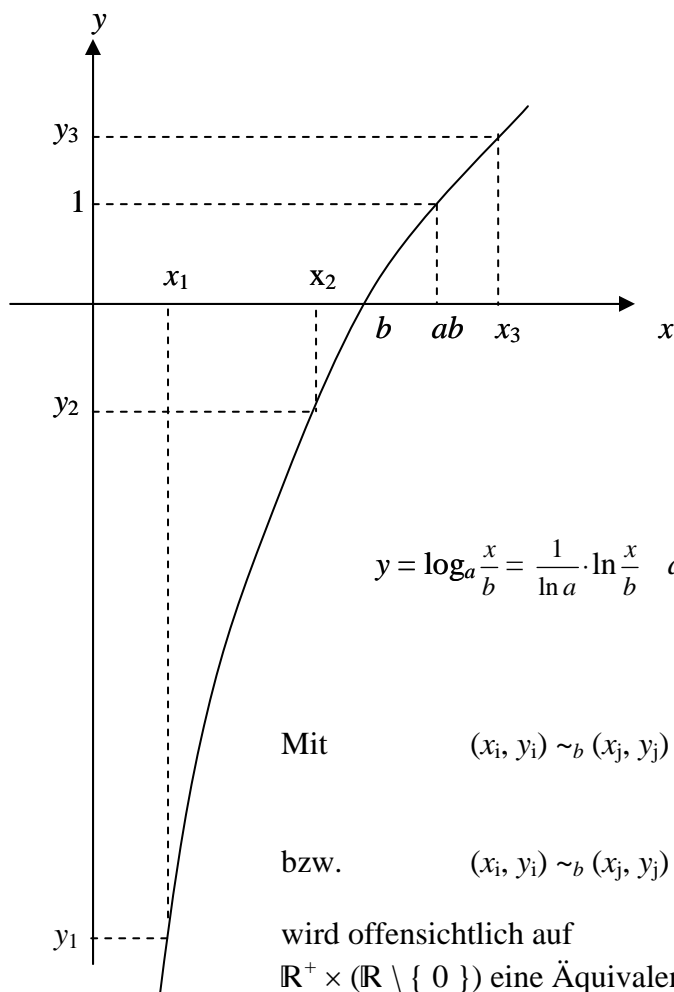
Diskussion der Klarheit, Eindeutigkeit usw. von Begriffen
und der Genauigkeit, Strenge usw. von Beweisen

Sammlung von Übungsaufgaben aus diesem Werk von Leibniz



Otto Hamborg
Fon/Fax 030 – 313 67 65
E-Mail hamborg-berlin@t-online.de
November 2005

Zur "logarithmischen Kurve" in Leibniz' *Quadratura Arithmetica*



$$y = \log_a \frac{x}{b} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln \frac{x}{b} \quad a, b > 0$$

Mit $(x_i, y_i) \sim_b (x_j, y_j) \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \left(\frac{x_i}{b}\right)^{y_i} = \left(\frac{x_j}{b}\right)^{y_j}$

bzw. $(x_i, y_i) \sim_b (x_j, y_j) \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \left(\frac{x_i}{b}\right)^{\frac{1}{y_i}} = \left(\frac{x_j}{b}\right)^{\frac{1}{y_j}}$

wird offensichtlich auf $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ eine Äquivalenzrelation " \sim_b " definiert.

Die Äquivalenzklassen sind gerade die Punktmenge

$$\mathbf{L}_{ab} = \left\{ (x, y) \mid \left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{y}} = a, a > 0 \right\} = \left\{ (x, y) \mid x = ba^y, a > 0 \right\} = \left\{ (x, y) \mid y = \log_a \left(\frac{x}{b}\right), a > 0, a \neq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

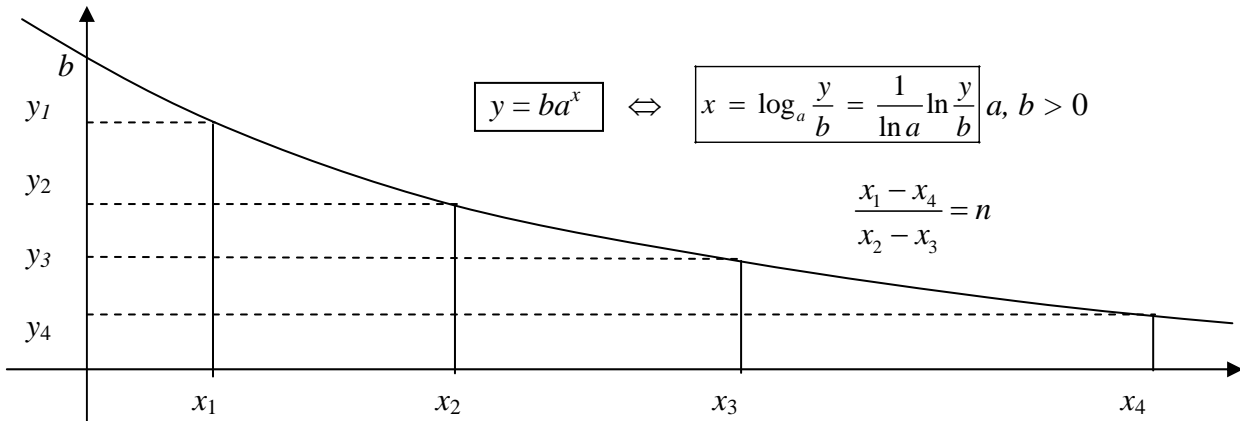
$$\left\{ (b, y) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad a = 1.$$

Wegen $(ab, 1) \in L_{ab}$ erhält man für $a \neq 1$ eine Beschreibung der von G. W. Leibniz als Logarithmische Kurven bezeichneten Punktmenge durch

$$\mathbf{L}_{ab} = [(ab, 1)]_{\sim_b}.$$

Bemerkung: Es ist noch !? der Punkt $(b, 0)$ zu ergänzen.

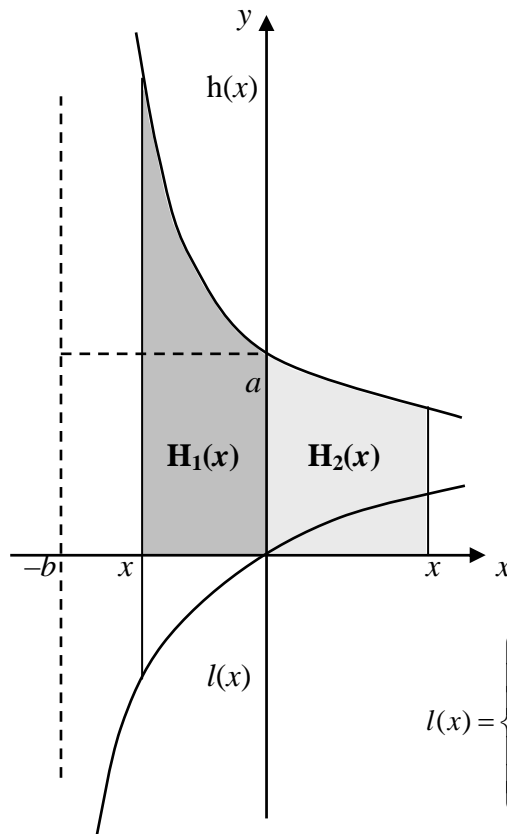
**Zur Logarithmischen Kurve
(Exponential- bzw. Logarithmusfunktion)**



$$\frac{y_1}{y_4} = \frac{ba^{x_1}}{ba^{x_4}} = a^{x_1 - x_4} = a^{n(x_2 - x_3)} = \frac{b^n \cdot a^{x_2 n}}{b^n \cdot a^{x_3 n}} = \frac{(ba^{x_2})^n}{(ba^{x_3})^n} = \left(\frac{y_2}{y_3} \right)^n$$

$$\boxed{\frac{y_1}{y_4} = \left(\frac{y_2}{y_3} \right)^{\frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_3}}} \Leftrightarrow \boxed{\left(\frac{y_1}{y_4} \right)^{\frac{1}{x_1 - x_4}} = \left(\frac{y_2}{y_3} \right)^{\frac{1}{x_2 - x_3}}}$$

Satz 44



Hyperbel $h(x) = \frac{ab}{b+x}$ mit $a, b > 0$

Logarithmische Kurve $= l(x) = a \log_v \frac{b+x}{b}$

$$l(x) = \begin{cases} -H_1(x) = -\int_{-b}^0 h(x) dx & \text{für } x \in]-b, 0] \\ H_2(x) = \int_0^x h(x) dx & \text{für } x \in [0, \infty[\end{cases}$$

Nach Satz 129 des Buches über die Hyperbel von Gregoire de Saint-Vincent (1584-1667) gilt

Fläche $l(x) = p \log_u \frac{b+x}{b}$, d. h. Proportionalität der Hyperbelflächen und Logarithmen.

Mit $h(x) = a \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{b}} \stackrel{\text{Satz 26}}{=} a \left(1 - \frac{x}{b} + \frac{x^2}{b^2} - \frac{x^3}{b^3} \pm \dots \right)$ folgt noch Satz 25, 29 (summandenweise Integration)

und der Wahl $a = p$ für p^* : $a \log_v \frac{b+x}{b} = l(x) = \int_0^x h(x) dx = a \left(x - \frac{x^2}{2b} + \frac{x^3}{3b^2} - \frac{x^4}{4b^3} \pm \dots \right)$, also:

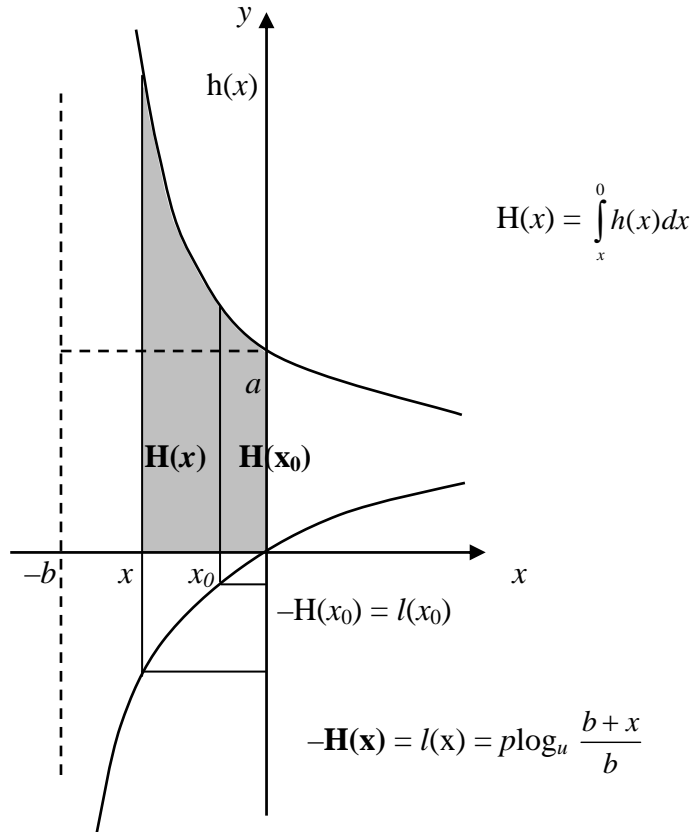
Satz 44

$$\log_v \frac{b+x}{b} = x - \frac{x^2}{2b} + \frac{x^3}{3b^2} - \frac{x^4}{4b^3} \pm \dots \quad \boxed{= b \ln \left(1 + \frac{x}{b} \right), \left| \frac{x}{b} \right| < 1} \quad b \cdot \ln v = 1.$$

* Für einen gegebenen Logarithmus zur Basis u lässt sich eine Basis v finden, sodass gilt: $p \log_u x = a \log_v x$ für

gegebene a, p . Setze $v = u^{\frac{a}{p}}$, d. h. $\frac{a}{p} = \log_u v = \frac{\log_u x}{\log_v x}$.

Satz 45



| |
|--|
| i) $\lim_{x \rightarrow -b} H(x) = \infty$ ii) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$ |
|--|

Satz 45

Beweis: i) Aufgrund der Proportionalität der Hyperbelflächen und Logarithmen erhält man für $-b < x < x_0 < 0$

$$-H(x) = l(x) = p \log_u \frac{b+x}{b} \Rightarrow \frac{H(x)}{H(x_0)} = \frac{\log_u \frac{b+x}{b}}{\log_u \frac{b+x_0}{b}} \Rightarrow H(-b) = p |\log_u 0| = \infty .$$

Noch zu zeigen:

Die senkrechte Gerade durch $x = -b$ ist eine Asymptote für $y = l(x) = p \log_u \frac{b+x}{b}$, d. h.

$$\bigwedge_{\substack{-b < x_0 < 0 \\ y_0 < 0}} \bigwedge_{M > 0} (y_0 = l(x_0) \wedge M > |y_0|) \Rightarrow \bigvee_{-b < x < x_0} |l(x)| > M .$$

Wähle dazu ein $y_N < 0$ mit $|y_N| > M$ für ein $M > |y_0|$. Dann gibt es ein x_N mit

$$\frac{b+x_N}{b} = \left(\frac{b+x_0}{b} \right)^{\frac{y_N}{y_0}} \stackrel{\text{Def. } l(x)}{\Leftrightarrow} y_N = l(x_N) \wedge y_0 = l(x_0) .$$

Aufgrund der Voraussetzung ist $\frac{y_N}{y_0} = \frac{|y_N|}{|y_0|} > 1$ und $0 < \frac{b+x_0}{b} < 1$ und damit auch $0 < \frac{b+x_N}{b} < \frac{b+x_0}{b}$,

d. h. $-b < x_N < x_0$ sowie $|l(x_N)| = |y_N| > M$.

ii) Folgt aus i) $H(-b) = \infty$ und aus dem zu Satz 42 Gesagten, dass nämlich die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ den Flächeninhalt $H(-b)$ ausdrückt.

Satz 46 (Anwendung von Satz 6)

Logarithmische Kurve (Exponentialfunktion)

Voraussetzung

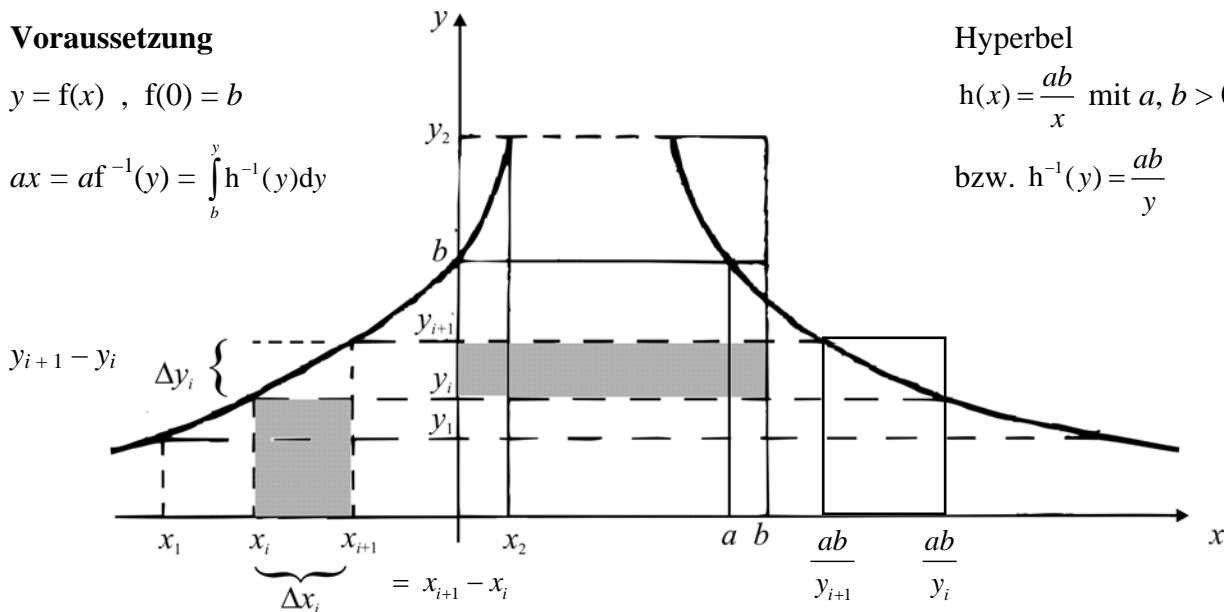
$$y = f(x), \quad f(0) = b$$

$$ax = af^{-1}(y) = \int_b^y h^{-1}(y) dy$$

Hyperbel

$$h(x) = \frac{ab}{x} \quad \text{mit } a, b > 0$$

$$\text{bzw. } h^{-1}(y) = \frac{ab}{y}$$



Satz 46

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = b(y_2 - y_1) = b(f(x_2) - f(x_1))$$

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = b^2$$

Beweis:

$$a \Delta x_i = \int_{y_i}^{y_{i+1}} h^{-1}(y) dy \quad \text{nach Voraussetzung}$$

$$\Rightarrow a \Delta x_i = \frac{ab}{y_{i+1}} \Delta y_i \quad \text{naherungsweise fur } \Delta y_i \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow a \Delta x_i = \frac{ab}{y_i} \Delta y_i \quad \text{naherungsweise fur } \Delta y_i \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow b \Delta y_i = y_i \Delta x_i$$

$$\Rightarrow b(y_2 - y_1) = \sum_{i=1}^n b \Delta y_i = \sum_{i=1}^n y_i \Delta x_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F_a,$$

da fur f^{-1} angenommen wird

$$y_{i+1} - y_i = \Delta y_i \rightarrow 0 \Rightarrow f^{-1}(y_{i+1}) - f^{-1}(y_i) = x_{i+1} - x_i = \Delta x_i \rightarrow 0.$$

$$\int_{x_1}^0 f(x) dx = b(f(0) - f(x_1)) \xrightarrow{x_1 \rightarrow -\infty} b f(0) = b^2.$$

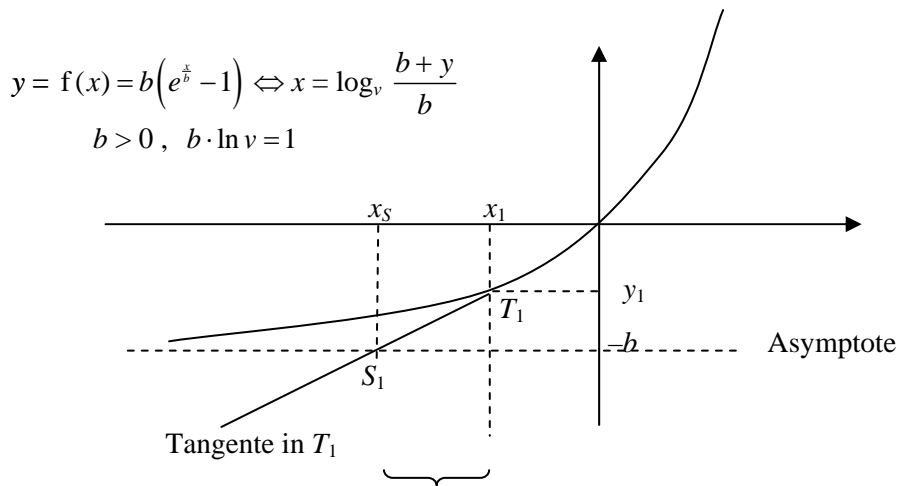
Bemerkung:

$$\delta \bar{x} = \int_b^y h^{-1}(y) dy \Rightarrow \delta \Delta \bar{x}_i = \frac{ab}{y_i} \Delta y_i \Rightarrow \frac{ab}{\delta} \Delta y_i = y_i \Delta \bar{x}_i$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{\delta} (y_2 - y_1) = \sum_{i=1}^n \frac{ab}{\delta} \Delta y_i = \sum_{i=1}^n y_i \Delta \bar{x}_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} f(\bar{x}) d\bar{x} = F_\delta$$

$$\text{Also: } \frac{F_a}{F_\delta} = \frac{\delta}{a}$$

Die von allen am meisten bewundernswerte Eigenschaft: die konstante Subtangente
 (der logarithmischen Kurve).
 Z. 2746, Satz 46, Scholium

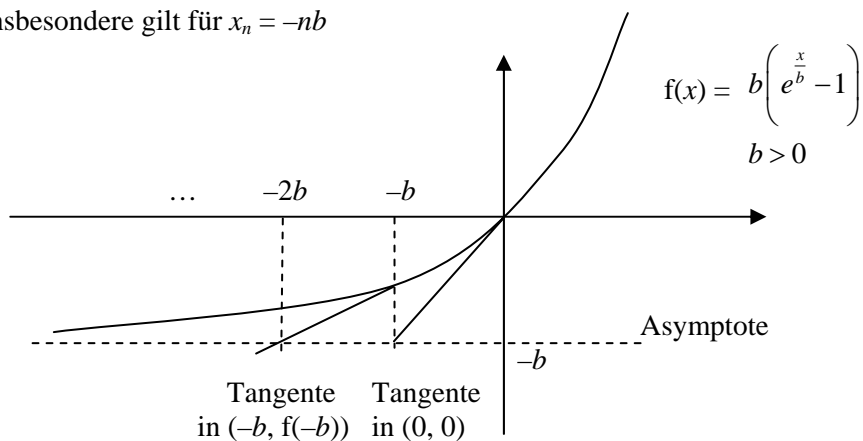


Beh.: $b = |x_S - x_1| = \text{Subtangente bzgl. } T_1$

Bew.: Gleichung der Tangente in T_1 $\frac{y - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_1} = e^{\frac{x_1}{b}}$,
 Schnittpunkt S_1 der Tangente mit Asymptote $y = -b$

$$\frac{-b - b \left(e^{\frac{x_1}{b}} - 1 \right)}{x_S - x_1} = e^{\frac{x_1}{b}} \Rightarrow \frac{-b}{x_S - x_1} = 1 \Rightarrow b = |x_S - x_1|.$$

Insbesondere gilt für $x_n = -nb$



Satz 47

Für $\log_u \frac{b+y}{b} = \int_b^y \frac{1}{b+y} dy$, siehe Satz 44, gilt

$$l(y) := x = \log_u \frac{b+y}{b} \Rightarrow n(x) := y = p \left(x + \frac{x^2}{2!b} + \frac{x^3}{3!b^2} + \frac{x^4}{4!b^3} + \dots \right)$$

Beweis: Es wird zunächst gezeigt, dass $\bar{n}(x) = x + \frac{x^2}{2!b} + \frac{x^3}{3!b^2} + \frac{x^4}{4!b^3} + \dots$ eine logarithmische Kurve darstellt, d. h. beschrieben wird durch $\bar{n}(x) = b(v^x - 1) \stackrel{\text{Def. log}_v}{\Leftrightarrow} x = \log_v \frac{b + \bar{n}(x)}{b}$ für eine Basis v .

$$\begin{aligned} \int_{x_1=0}^{x_2>0} \bar{n}(x) dx &= \int_{x_1=0}^{x_2>0} \left(x + \frac{x^2}{2!b} + \frac{x^3}{3!b^2} + \frac{x^4}{4!b^3} + \dots \right) dx = \frac{x_2^2}{2!} + \frac{x_2^3}{3!b} + \frac{x_2^4}{4!b^2} + \dots \quad \text{Vor., Satz 25, 29} \\ \Rightarrow \frac{1}{b} \int_{x_1=0}^{x_2>0} \bar{n}(x) dx &= \frac{x_2^2}{2!b} + \frac{x_2^3}{3!b^2} + \frac{x_2^4}{4!b^3} + \dots \\ \Rightarrow \frac{1}{b} \int_{x_1=0}^{x_2>0} \bar{n}(x) dx + x_2 &= x_2 + \frac{x_2^2}{2!b} + \frac{x_2^3}{3!b^2} + \frac{x_2^4}{4!b^3} + \dots = \bar{n}(x_2) \quad \text{Vor.} \\ \Rightarrow \int_{x_1=0}^{x_2>0} \bar{n}(x) dx + bx_2 &= b\bar{n}(x_2) \\ \Rightarrow \int_{x_1=0}^{x_2>0} (\bar{n}(x) + b) dx &= b\bar{n}(x_2) \end{aligned}$$

Mit $g(x) = \bar{n}(x) + b$ folgt wegen $\bar{n}(0) = 0$: $\int_{x_1=0}^{x_2>0} g(x) dx = b(g(x_2) - g(0))$.

Die letzte Gleichung gilt für alle $x_2 \in [0, \infty[$ und stellt nach Satz 46 eine notwendige Eigenschaft einer logarithmischen Kurve dar. Für $x_1 \in]-\infty, 0]$, d. h. $x_1 < x_2 = 0$ wird ein entsprechender Beweis durchgeführt und Leibniz behauptet nun, dass $g(x)$ bzw. $\bar{n}(x)$ eine logarithmische Kurve ist. Die möglicherweise problematische Begründung dafür liefert er in einer gestrichenen Variante:

"Dass dies [d. h. $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = b(f(x_2) - f(x_1))$] aber für einen beliebigen auf der Kurve gewählten Punkt

K unterhalb von A [hier: K = x_2 oberhalb von A = 0] zutrifft, ist eine Eigenschaft der logarithmischen Kurve, wie es bei ihrer im vorangehenden Satz [46] dargestellten Quadratur gezeigt wurde." Dann sagt er weiter (2815 f. gestrichen): "Und sie kann in der Tat niemals auf eine andere Kurve zutreffen, wie es klar sein wird für den, der diesen Beweis [Satz 46] untersucht, weil alle in ihm verwendeten Aussagen umkehrbar sind; und es kann von dort sofort ein Beweis durch Umkehrung zurechtgelegt werden."

In der späteren "Zusammenfassung der Arithmetischen Quadratur" (1678/80, LMG V, 99-113) benutzt Leibniz zum Beweis von Satz 47 die Methode des Koeffizientenvergleichs bzgl. einer angenommenen Potenzreihe $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ unter Verwendung der in Satz 46

bewiesenen funktionalen Identität $\int_0^x y dx = by - bx$, d. h. $\int_0^x f(x) dx = bf(x) - bx$.

Bemerkung: Die Zeichen \int, d werden in der "Arithmetischen Quadratur" (1676) nirgends verwendet.