

Material zu: Zyklisches Nummerieren in der Ebene

Quaternäre bilaterale Gleichverteilung der ersten 4^n natürlichen Zahlen

Magische Quadrate mit 4^n Feldern

(Otto Hamborg, im April 2002)

Der Eid der Pythagoreer:

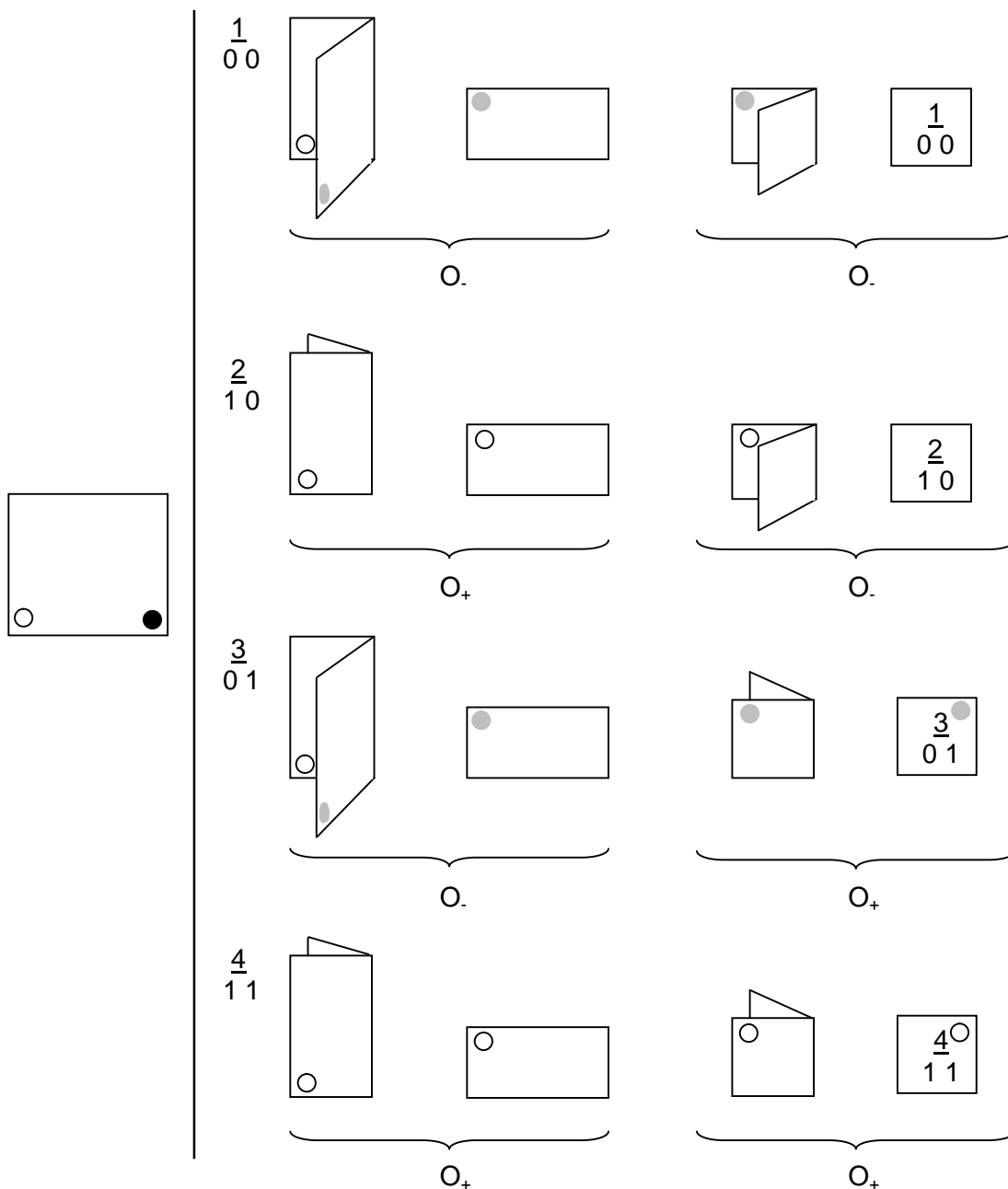
ἴ̄ῑ, ἴ̄ N ὀ' ἴ̄ Q̄ī ἀ̄ὸ̄Ῡn̄ᾱε̄ ὀ̄δ̄=0̄ε̄
 ὀ̄ἀ̄n̄ᾱᾱῦ̄ί̄ὀ̄ἀ̄ ὀ̄ἀ̄ὸ̄n̄ᾱε̄ὀ̄γ̄ί̄,
 Ἐ̄ἀ̄ᾱN̄ί̄ P̄á̄í̄Ū̄ί̄ ὀ̄γ̄ὀ̄á̄ῦ̄ὀ̄
 ¼̄B̄ǣῦ̄ì̄ Ū̄ ὀ̄' h̄=ἴ̄ ὀ̄ὀ̄á̄ί̄.

1	2
4	3

Zahlenschema I

Nein, bei dem, der unserer Seele die Tetraktys übergeben hat, welche Quelle und Wurzel der ewigen Natur enthält.

- 1 ↔ 00 = - - ↔ $O_- \bullet O_-$
- 2 ↔ 10 = + - ↔ $O_+ \bullet O_-$
- 3 ↔ 01 = - + ↔ $O_- \bullet O_+$
- 4 ↔ 11 = ++ ↔ $O_+ \bullet O_+$



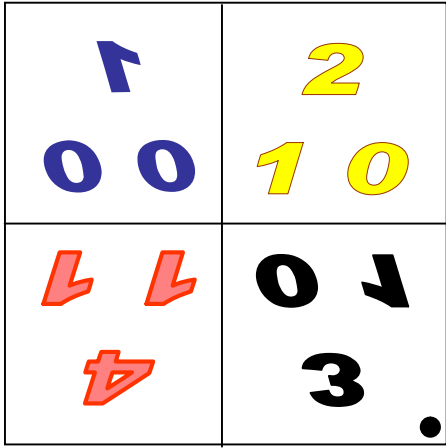
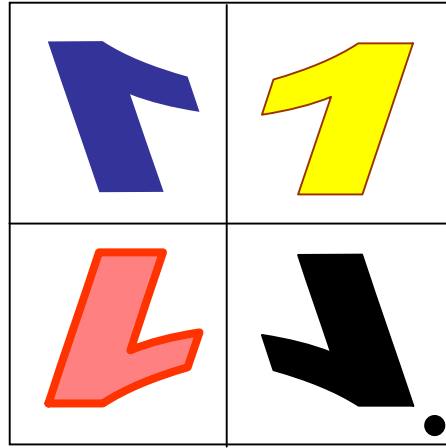


Bild I



Farbgestalt I

















































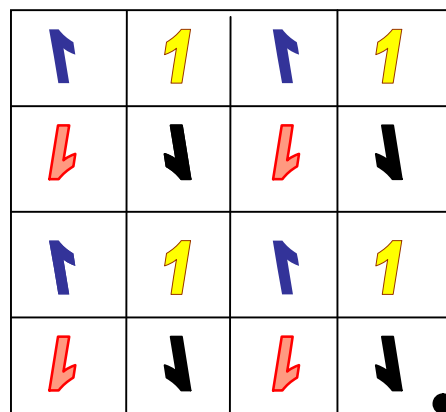
  	  	  	  
  	  	  	  
  	  	  	  
  	  	  	  

Bild II

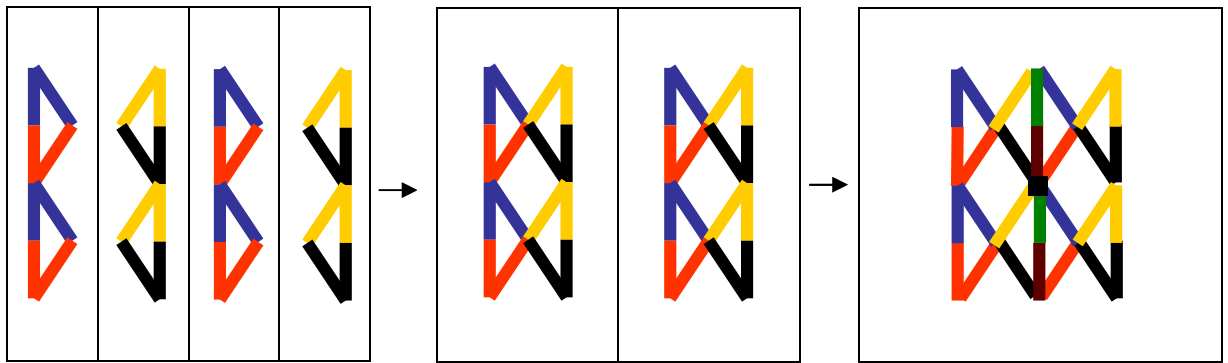
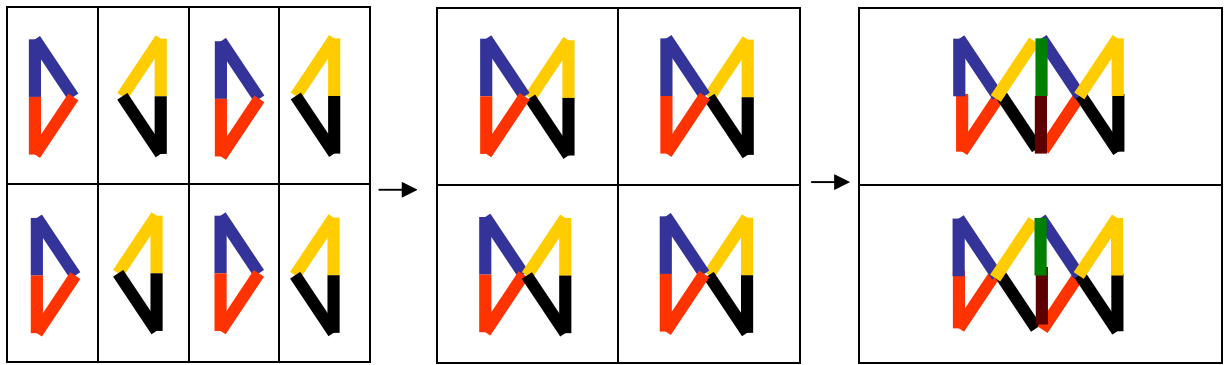
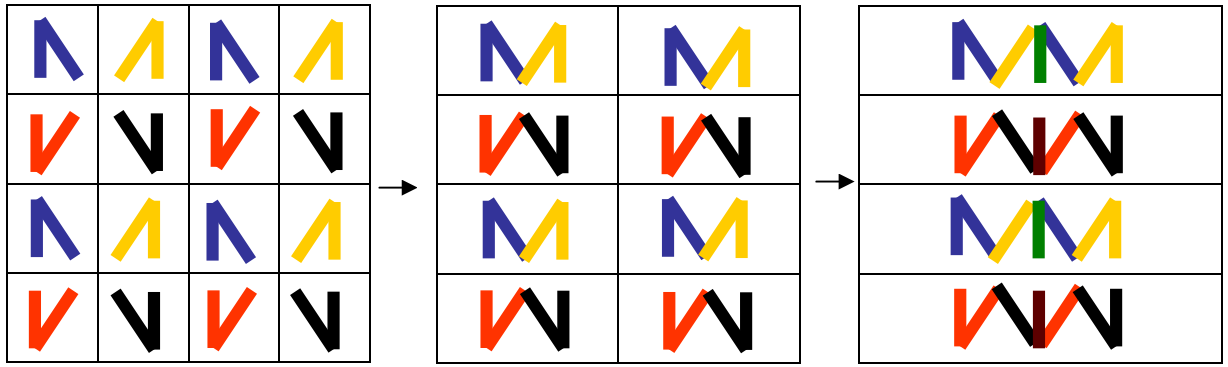
5	4	3	6
12	13	14	11
9	16	15	10
8	1	2	7

Zahlenschema II



Farbgestalt II

Lateralkombinationen



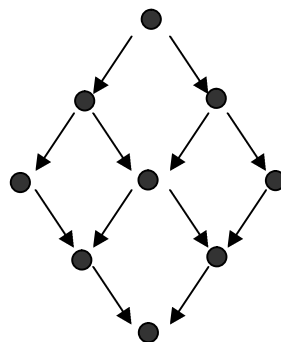
E₁₆

E₈

E₄

E₂

E₁



Der Weg zurück

44	53	52	45	46	51	54	43
21	12	13	20	19	14	11	22
28	5	4	29	30	3	6	27
37	60	61	36	35	62	59	38
40	57	64	33	34	63	58	39
25	8	1	32	31	2	7	26
24	9	16	17	18	15	10	23
41	56	49	48	47	50	55	42

9	7	5	11
23	25	27	21
17	31	29	19
15	1	3	13

5	4	3	6
12	13	14	11
9	16	15	10
8	1	2	7

5	4	3	6
12	13	14	11
9	16	15	10
8	1	2	7

$\xrightarrow{|n-m|}$

1		3	
7		5	

$\xrightarrow{\frac{n+1}{2}}$

1	2
4	3

Zwei magische Quadrate $\overline{\mathbf{M}}$ mit $4^2 = 16$ bzw. $4^3 = 64$ Feldern

Konstruktionsprinzip:

1. Schritt

Herstellung einer quadratischen Anordnung der Zahlen von 1 bis 4^n , bei der die Spaltensummen gleich sind und nur zwei Zahlen als Zeilensummen auftauchen.

2. Schritt

Anwendung von zwei Spiegelungen, die schon im 1. Schritt benutzt wurden.

16 Felder

1. Die $n \times n$ Matrix $S_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ lässt sich interpretieren als

$$M_{m,n} S_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,n} & \dots & a_{1,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,n} & \dots & a_{m,1} \end{pmatrix} = M_{m,n}^v \hat{=} \text{Spiegelung an der Vertikalen}$$

und

$$S_n M_{n,m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n,1} & \dots & a_{n,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \end{pmatrix} = M_{n,m}^h \hat{=} \text{Spiegelung an der Horizontalen}$$

Nun werden zuerst die 4^2 Felder mit der Vierheit a, b, c, d markiert gemäß

$$M_{16} = \begin{array}{cc|cc} a & b & b & a \\ & 1 & & 2 \\ \hline d & c & c & d \\ d & c & c & d \\ & 4 & & 3 \\ a & b & b & a \end{array} = \begin{array}{c|c} M_4 & M_4^v \\ \hline M_4^h & (M_4^v)^h \end{array} \quad \text{und anschließend die Zahlen } 1, \dots, 16$$

in die k -ten Vierheiten eingetragen nach der Vorschrift

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 + u_k \\ 9 - u_k \\ 25 + u_k \\ 25 - u_k \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} u_k = 2k - 1 \\ k = 1, \dots, 4 \end{array}$$

Bemerkung: An dieser Stelle sei schon darauf hingewiesen, dass die obige Zerlegung den Kern des

Verfahrens ausmacht. Das hängt zusammen mit $\sum_1^{16} n = 8 \cdot 17 = \frac{25-9}{2} \cdot \frac{25+9}{2}$.

Somit ergibt sich

$$M_{16} = \begin{array}{cc|cc|c} 5 & 4 & 3 & 6 & 2 \cdot 9 \\ 12 & 13 & 14 & 11 & 2 \cdot 25 \\ \hline 9 & 16 & 15 & 10 & 2 \cdot 25 \\ 8 & 1 & 2 & 7 & 2 \cdot 9 \\ \hline 34 & 34 & 34 & 34 & \end{array}$$

2.

$$M_{16} = \begin{array}{c|c} M_4^1 & M_4^2 \\ \hline M_4^4 & M_4^3 \end{array} \xrightarrow{S_2 M_4^i} \begin{array}{c|c} M_4^1 & M_4^{2h} \\ \hline M_4^4 & M_4^{3h} \end{array} = \begin{array}{c|c} 5 & 11 \\ 12 & 6 \\ 9 & 7 \\ 8 & 10 \end{array} \xrightarrow{N_{4,2}} \begin{array}{c|c} 11 \\ 6 \\ 7 \\ 10 \end{array} = M_{16}^*$$

$$M_{16}^* = \begin{array}{c|c|c|c} 5 & 4 & 14 & 11 \\ 12 & 13 & 3 & 6 \\ 9 & 16 & 2 & 7 \\ 8 & 1 & 15 & 10 \end{array} \xrightarrow{N_{4,2} S_2} \begin{array}{c|c} 5 & 11 \\ 12 & 6 \\ 9 & 7 \\ 8 & 10 \end{array} \xrightarrow{N_{4,2}^V} \begin{array}{c|c} 11 \\ 6 \\ 7 \\ 10 \end{array} = M_{16}^{**}$$

$$M_{16}^{**} = \begin{array}{c|c|c|c} 5 & 14 & 4 & 11 \\ 12 & 3 & 13 & 6 \\ 9 & 2 & 16 & 7 \\ 8 & 15 & 1 & 10 \end{array} = \overline{M}_{16}$$

Bemerkung: Die beiden Spiegelungen stehen in einer dualen Beziehung zueinander, die gerade in der umgangssprachlichen Formulierung deutlich wird.

MS = M^v : Zwei vertikale Spiegelungen bzgl. der halben äußeren Achsen
 SM = M^h : Eine horizontale Spiegelung bzgl. der ganzen inneren Achse

In ähnlicher Weise kann man eine duale Beziehung zwischen dem arithmetischen und harmonischen Mittel ausdrücken durch ein Modell mit Ohmschen Widerständen:

M_a : Parallelschaltung zweier Reihenschaltungen
 M_h : Reihenschaltung zweier Parallelschaltungen (vgl. Hamborg 1995)

Zwei verwandte magische Quadrate

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Es gilt:} \quad \mathbf{D} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} \mathbf{D} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \\ b_4 & a_4 \end{pmatrix}$$

$\text{sgn}(\mathbf{X}_{m,n}) = \text{Vorzeichen aus der Matrix } (\mathbf{X}_{m,n}) = (\mathbf{L}_{ij}) \text{ bzw. } (\mathbf{R}_{ij})$

I

5	4	3	6	5	4	14	11
12	13	14	11	12	13	3	6
9	16	15	10	9	16	2	7
8	1	2	7	8	1	15	10

→

5	14	4	11
12	3	13	6
9	2	16	7
8	15	1	10

= **R**

→

12	3	13	6
5	14	4	11
8	15	1	10
9	2	16	7

= **L**

-	+	+	-	+	-	-	+
+	-	-	+	-	+	+	-
-	+	+	-	+	-	-	+
+	-	-	+	-	+	+	-

= **L**

→

DO	DU	= L	(R _{ij})	(L _{ij})
----	----	------------	--------------------	--------------------

×

DO	DU	= R	(L _{ij})	(R _{ij})
----	----	------------	--------------------	--------------------

→

$\text{sgn}(\mathbf{L}_{ij})\mathbf{L}_{ij} + \text{sgn}(\mathbf{R}_{i,5-j})\mathbf{R}_{i,5-j} = 1$

II

5	4	3	6	12	13	3	6
12	13	14	11	5	4	14	11
9	16	15	10	8	1	15	10
8	1	2	7	9	16	2	7

→

12	3	13	6
5	14	4	11
8	15	1	10
9	2	16	7

= **L**

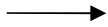
→

5	14	4	11
12	3	13	6
9	2	16	7
8	15	1	10

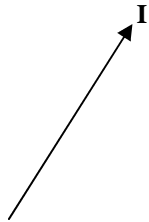
= **R**

+	-	-	+	-	+	+	-
-	+	+	-	+	-	-	+
+	-	-	+	-	+	+	-
-	+	+	-	+	-	-	+

5	4	3	6
12	13	14	11
9	16	15	10
8	1	2	7



9	9
25	25
25	25
9	9

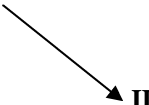
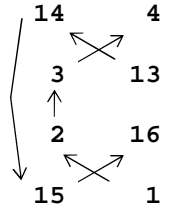
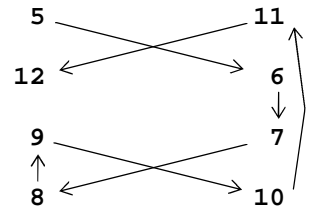


9	25
25	9
25	9
9	25

=

5	18	11
12	16	6
9	18	7
8	16	10

= R

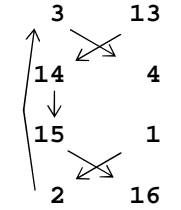
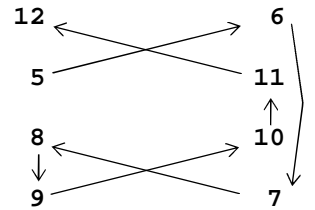


25	9
9	25
9	25
25	9

=

12	16	6
5	18	11
8	16	10
9	18	7

= L



64 = 4 · 16 Felder

1. Die Eintragung der 16 Vierheiten $(a, b, c, d)_k$, $k = 1, \dots, 16$ in M_{64} erfolgt entsprechend der Matrix M_{16} und ergibt zusammen mit dem sukzessiven Aufbau der Buchstabenanordnung das Bild a). Das Schema b) M_{64} zeigt die Anordnung der Zahlen 1, ..., 64, bei der alle Spaltensummen gleich 260 und alle Zeilensummen gleich 132 oder 388 sind, wenn die Belegung der Vierheiten gemäß der Formel

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 33 + u_k \\ 33 - u_k \\ 97 + u_k \\ 97 - u_k \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} u_k = 2k - 1 \\ k = 1, \dots, 16 \end{matrix} \text{ erfolgt ist.}$$

Bild a)

a	b	b	a	a	b	b	a
5		4		3		6	
d	c	c	d	d	c	c	d
d	c	c	d	d	c	c	d
12		13		14		11	
a	b	b	a	a	b	b	a
a	b	b	a	a	b	b	a
9		16		15		10	
d	c	c	d	d	c	c	d
d	c	c	d	d	c	c	d
8		1		2		7	
a	b	b	a	a	b	b	a

Schema b) M_{64}

21	12	13	20	19	14	11	22	4.33
44	53	52	45	46	51	54	43	4.97
37	60	61	36	35	62	59	38	4.97
28	5	4	29	30	3	6	27	4.33
25	8	1	32	31	2	7	26	4.33
40	57	64	33	34	63	58	39	4.97
41	56	49	48	47	50	55	42	4.97
24	9	16	17	18	15	10	23	4.33

4 · 65 = 260

2. Acht Spiegelungen $S_2 M_4^i = M_4^{ih}$ an vier horizontalen Viertelachsen ergeben M_{16}^*

	M_4^4		M_4^6
	M_4^{13}		M_4^{11}
	M_4^{16}		M_4^{10}
	M_4^1		M_4^7
\bar{a}_1	\bar{a}_2	\bar{a}_3	\bar{a}_4
\bar{a}_5	\bar{a}_6	\bar{a}_7	\bar{a}_8

M_{16}

	12	52	45		14	54	43
	53	13	20		51	11	22
	60	4	29		62	6	27
	5	61	36		3	59	38
	8	64	33		2	58	39
	57	1	32		63	7	26
	56	16	17		50	10	23
	9	49	48		15	55	42
\bar{a}_1	$N_{8,2}^1$	\bar{a}_4^*	\bar{a}_5	$N_{8,2}^2$	\bar{a}_8^*		

M_{16}^*

$S_2 M_4^i \rightarrow$
 $S_2 \rightarrow$

Zwei Spiegelungen $N_{8,2}^I$ $S_2 = N_{8,2}^{IV}$ an zwei vertikalen ganzen Achsen

stellen nun das magische Quadrat \overline{M}_{64} her.

21	52	12	45	19	54	14	43
44	13	53	20	46	11	51	22
37	4	60	29	35	6	62	27
28	61	5	36	30	59	3	38
25	64	8	33	31	58	2	39
40	1	57	32	34	7	63	26
41	16	56	17	47	10	50	23
24	49	9	48	18	55	15	42
\bar{a}_1	$N_{8,2}^{1*}$	\bar{a}_4	\bar{a}_5	$N_{8,2}^{2*}$	\bar{a}_8		

\overline{M}_{64}

Bemerkung: Das Quadrat \overline{M}_{64} entsteht also dadurch, dass bei $M_{64} = \begin{array}{c|c} M_{16}^1 & M_{16}^2 \\ \hline M_{16}^4 & M_{16}^3 \end{array}$ die Buchstaben in jedes

M_{16}^i wie in M_{16} eingetragen werden, die dann gemäß der Formel für die 16 Vierheiten belegt werden.

Anschließend wird jedes M_{16}^i wie M_{16} behandelt.

a	b	b	a	a	b	b	a
d	c	c	d	d	c	c	d
d	c	c	d	d	c	c	d
a	b	b	a	a	b	b	a
a	b	b	a	a	b	b	a
d	c	c	d	d	c	c	d
d	c	c	d	d	c	c	d
a	b	b	a	a	b	b	a

21	25	20	19	25	22
81	105	81	81	105	81
81	121	81	81	121	81
28	9	29	30	9	27
25	9	32	31	9	26
81	121	81	81	121	81
81	105	81	81	105	81
24	25	17	18	25	23

Mit 9 , 25 und $49 = 21 + 28 = 20 + 29 = \dots$, 81 , 121 und $169 = 105 + 2^6$

tauchen aus den $64 = 2^6$ Feldern die ersten 6 ungeraden Quadratzahlen auf.

Eine andere "maximale" Anordnung der Schachfiguren

	a	b	c	d	e	f	g	h
8	T	S	L	D	K	L	S	T
7	B	B	B	B	B	B	B	B
6								
5								
4								
3								
2	B	B	B	B	B	B	B	B
1	T	S	L	D	K	L	S	T

	K	T	T	K	B	B	B
	D	T	T	D	B	B	B
	L	S	S	L	B	B	B
	L	S	S	L	B	B	B

lineare Zählweise

8	16	24	32	40	48	56	64
7	15	23	31	39	47	55	63
2	10	18	26	34	42	50	58
1	9	17	25	33	41	49	57

zyklisch-planare Zählweise

	40	57	64	33	34	63	58
	25	8	1	32	31	2	7
	24	9	16	17	18	15	10
	41	56	49	48	47	50	55