G. W. Leibniz 1715 / GM VII, 3

INITIA RERUM MATHEMATICARUM METAPHYSICA

Meditationes circa **Analysin Axiomatum** et circa **naturam similitudinis.**

METAPHYSISCHE ANFÄNGE MATHEMATISCHER SACHEN

Gedanken über die **Analyse der Axiome** und das **Wesen der Ähnlichkeit.**

[Stand: 02. Dezember 2019]
[Wird noch weiter bearbeitet und vervollständigt!]

Zur Motivation meiner Übersetzung der nachfolgenden Leibniz-Texte

Ich verstehe sie als weiteren Beitrag zur Diskussion über Grundlagenfragen in der Mathematik bei Leibniz, wobei die zusätzlichen Zeichen bzw. Symbole und Zeichnungen bzw. Diagramme eine wesentliche Rolle zugedacht werden soll für einen intuitiven Zugang zu mathematischen Sachverhalten.

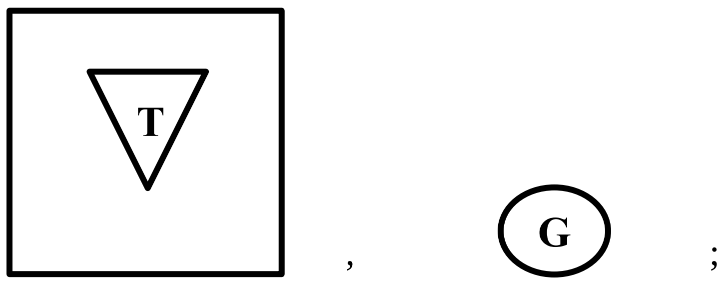
Zum Beispiel:

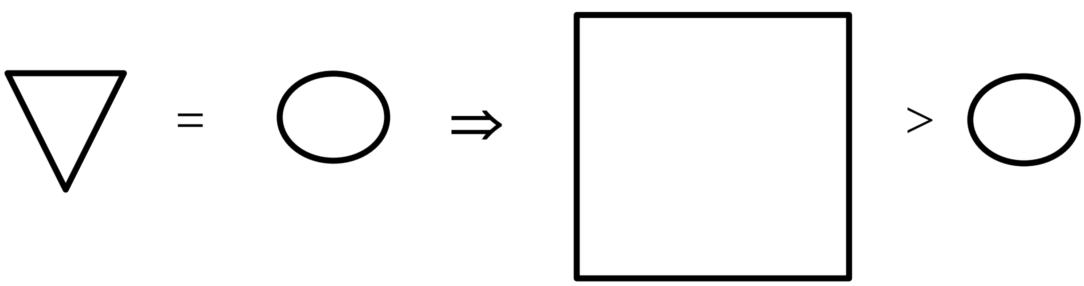
Si pars <u>unius</u> sit aequalis <u>alteri</u> toti, illud vocatur *Minus*, hoc *Majus*. (LMG VII, S. 20)

Wenn ein Teil von etwas dem übrigen gleich ist, wird jenes *kleiner*, dieses *größer* genannt. (Herring[1])

Wenn ein Teil einer Größe einer anderen Größe in ihrer Gesamtheit gleich ist, so heißt die erste *größer*, die zweite *kleiner*. (Buchenau[2])

Wenn ein Teil von einem [Ganzen] gleich einem anderen Ganzen ist, wird jenes [Andere] *kleiner*, dieses *größer* genannt.





[1] *Herring, Herbert*: Gottfried Wilhelm Leibniz, Philosophische Schriften. - Band 4: Schriften zur Logik und zur philosophischen Grundlegung von Mathematik und Naturwissenschaft. suhrkamp taschenbuch wissenschaft 1267, 1. Aufl. 1996.

[2] *Buchenau, Artur u. Cassirer, Ernst* (Hrsg.): Gottfried Wilhelm Leibniz, Philosophische Werke Band 1: Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie I. Meiner Verlag, Philosophische Bibliothek 496, Neuausgabe 1996.

Wittgenstein: Tractatus, 4.112
Der Zweck der Philosophie ist die logische Klärung der Gedanken.
Die Philosophie ist keine Lehre, sondern eine Tätigkeit.
Ein philosophisches Werk besteht wesentlich aus Erläuterungen.
Das Resultat der Philosophie sind nicht "philosophische Sätze", sondern das Klarwerden von Sätzen.
Die Philosophie soll die Gedanken, die sonst, gleichsam, trübe und verschwommen sind, klar machen und scharf abgrenzen.

G. W. Leibniz 1715 / GM VII, 3

INITIA RERUM MATHEMATICARUM METAPHYSICA.

Cum insignis Mathematicus Christianus Wolfius nuper in Cursu suo Mathematico Latino meditationes quasdam meas circa Analysin Axiomatum et circa naturam similitudinis attigerit et pro more suo illustrarit (vid. Act. Erudit A. 1714), visum est nonnulla huc spectantia, dudum a me animo concepta, ne intercidant proferre, ex quibus intelligi potest, esse artem quandam Analyticam Mathematica ampliorem, ex qua Mathematica scientia pulcherrimas quasque suas Methodos mutuatur. Paulo ergo altius ordiri placet:

Meditationes circa **Analysin Axiomatum** et circa **naturam similitudinis.**

METAPHYSISCHE ANFÄNGE MATHEMATISCHER SACHEN.

Da der ausgezeichnete Mathematiker Christian Wolff kürzlich in seinem lateinischen Mathematikkurs einige Gedanken von mir über die Analyse der Axiome und das Wesen der Ähnlichkeit erwähnt und auf seine Art erläutert hat (siehe Acta Eruditorum, Jahr 1714), ist es beabsichtigt, einige diesbezügliche Betrachtungen, die mich schon lange beschäftigen, vorzutragen, damit sie nicht verloren gehen, aus denen man verstehen kann, dass es eine Kunst der Analyse gibt, umfassender als die Mathematik, aus der die mathematische Wissenschaft ihre gerade schönsten Methoden entlehnt. Es wird also für gut befunden, etwas weiter auszuholen.

Gedanken über die **Analyse der Axiome** und das **Wesen der Ähnlichkeit**

Si plures ponantur existere rerum status, nihil oppositum involventes, dicentur existere **simul**. Itaque quae anno praeterito et praesente facta sunt negamus esse simul, involvunt enim oppositos ejusdem rei status.

Si eorum quae non sunt simul unum rationem alterius involvat, illud **prius**, *hoc* **posterius** *habetur*. Status meus prior rationem involvit, ut posterior existat. Et cum status meus prior, ob omnium rerum connexionem, etiam statum aliarum rerum priorem involvat, hinc status meus prior etiam rationem involvit status posterioris aliarum rerum atque adeo et aliarum rerum statu est prior. Et ideo *quicquid existit alteri existenti aut simul est aut prius aut posterius.*

Anmerkung:

<u>Existenzrelation</u>

status rerum	**A, B, …**
simul	$=$
non simul	$\neq$
prius	$<$
posterius	$>$
aut	$\sqcup$

$$\boxed{\mathbf{A = B \quad \sqcup \quad A < B \quad \sqcup \quad A > B}}$$

Wenn gesetzt wird, dass mehrere Zustände von Sachen existieren, die nichts Entgegengesetztes einschließen, so wird gesagt, dass sie **zugleich** *existieren.* Deshalb verneinen wir, dass die Ereignisse des vergangenen und des gegenwärtigen Jahres zugleich sind, denn sie schließen entgegengesetzte Zustände derselben Sache ein.

Wenn von Dingen, die nicht zugleich sind, das eine den Grund des anderen einschließt, so wird jenes für das **vorhergehende**, *dieses für das* **nachfolgende** *gehalten.* Mein vorhergehender Zustand schließt den Grund ein, dass ein nachfolgender existiert. Und weil mein vorhergehender Zustand, wegen des Zusammenhangs aller Sachen, sogar den vorhergehenden Zustand anderer Sachen einschließt, schließt daher mein vorhergehender Zustand sogar den Grund eines nachfolgenden Zustandes anderer Sachen ein, und deshalb ist er eher als ein Zustand anderer Sachen. Und deshalb *ist alles, was existiert, für ein anderes Existierendes entweder zugleich oder vorhergehend oder nachfolgend*.

Anmerkung:

<u>Seinsbeziehung</u>

Zustände von Sachen	**A, B, …**
zugleich	$=$
nicht zugleich	$\neq$
vorhergehend	$<$
nachfolgend	$>$
oder	$\sqcup$

$$\boxed{\mathbf{A = B \quad \sqcup \quad A < B \quad \sqcup \quad A > B}}$$

Tempus *est ordo existendi eorum quae non sunt simul*. Atque adeo est ordo mutationum generalis, ubi mutationum species non spectatur.

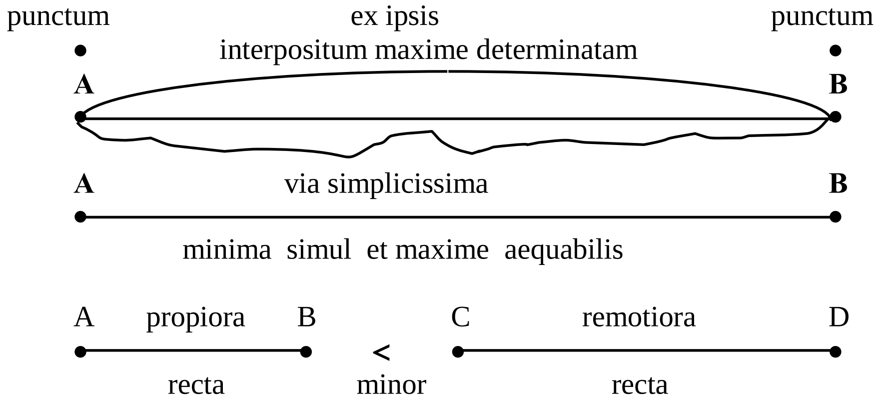
Duratio *est temporis magnitudo*. Si temporis magnitudo aequabiliter continue minuatur, tempus abit in *Momentum*, cujus magnitudo nulla est.

Spatium *est ordo coexistendi* seu ordo existendi inter ea quae sunt simul.

Secundum utrumque ordinem (temporis vel spatii) **propiora sibi aut remotiora** *censentur, prout ad ordinem inter ipsa intelligendi plura paucioraque correquiruntur*. Hinc duo puncta propiora sunt, quorum interposita ex ipsis maxime determinata dant aliquid simplicius. Tale interpositum maxime determinatum, est via ab uno ad aliud simplicissima, minima simul et maxime aequabilis, nempe recta, quae minor interjecta est inter puncta propiora.

Extensio *est spatii magnitudo*. Male Extensionem vulgo ipsi extenso confundunt, et instar substantiae considerant.

Si spatii magnitudo aequabiliter continue minuatur abit in *punctum* cujus magnitudo nulla est.



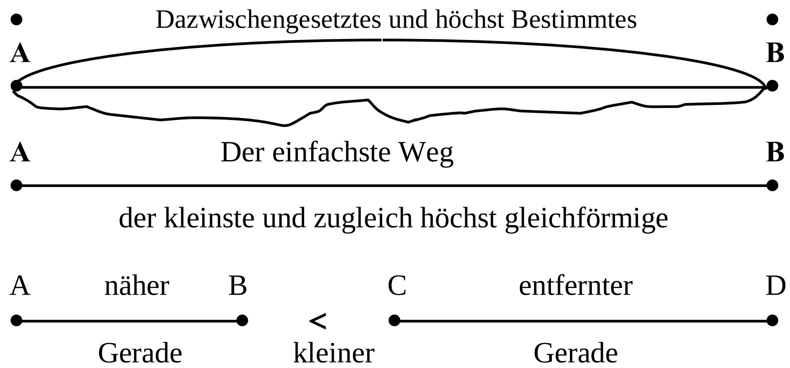
Zeit *ist eine Ordnung des Existierens der Dinge, die nicht zugleich sind*. Und deshalb ist sie die allgemeine Ordnung von Veränderungen, wo(bei) die Art der Veränderungen nicht betrachtet wird.

Dauer *ist Größe von* Zeit. Wenn die Größe von Zeit gleichförmig stetig vermindert wird, läuft die Zeit auf einen *Augenblick* hinaus, dessen Größe Null ist.

Raum *ist eine Ordnung des Koexistierens* bzw. eine Ordnung des Existierens zwischen den Dingen, die zugleich sind.

Bezüglich jeder der beiden Ordnungen (der Zeit oder der des Raumes) *werden Dinge für* **einander näher** *oder* **entfernter** *gehalten, je nachdem mehr und weniger Dinge erforderlich sind, um sich die Ordnung zwischen den Dingen selbst vorzustellen*. Es sind daher zwei Punkte näher, deren dazwischengesetzte von ihnen selbst höchst bestimmte Dinge etwas Einfacheres ergeben. Ein derartiges Dazwischengesetztes und höchst Bestimmtes ist der einfachste Weg von einem zu einem anderen Punkt, der kleinste und zugleich höchst gleichförmige, die Gerade nämlich, die zwischen näheren Punkten als eine kleinere dazwischengelegen ist.

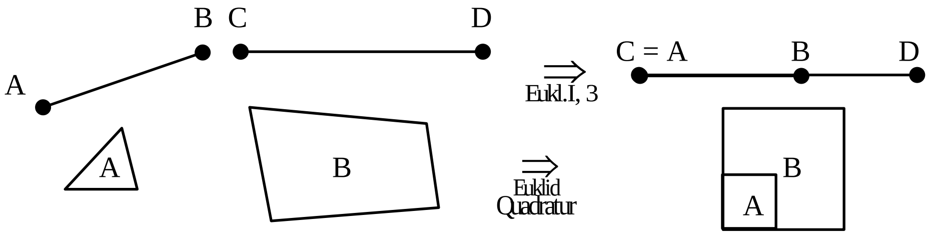
Ausdehnung *ist Größe von Raum*. Man vermischt gewöhnlich, - und das ist schlecht -, die Ausdehnung mit dem Ausgedehnten selbst und betrachtet sie wie eine Substanz. Wenn die Größe von Raum gleichförmig stetig vermindert wird, läuft [der Raum] auf einen *Punkt* hinaus, dessen Größe Null ist.



Situs *est coexistentiae modus*. Itaque non tantum quantitatem, sed et qualitatem involvit.

Quantitas *seu Magnitudo est, quod in rebus sola compraesentia (seu perceptione simultanea) cognosci potest.*

z. B.



Sic non potest cognosci, quid sit pes, quid ulna, nisi actu habeamus aliquid tanquam mensuram, quod deinde aliis applicari possit. Neque adeo pes ulla definitione satis explicari potest, nempe quae non rursus aliquid tale involvat. Nam etsi pedem dicamus esse duodecim pollicum eadem est de pollice quaestio, nec majorem inde lucem acquirimus, nec dici potest, pollicis an pedis notio sit natura prior, cum in arbitrio existat utrum pro basi sumere velimus.

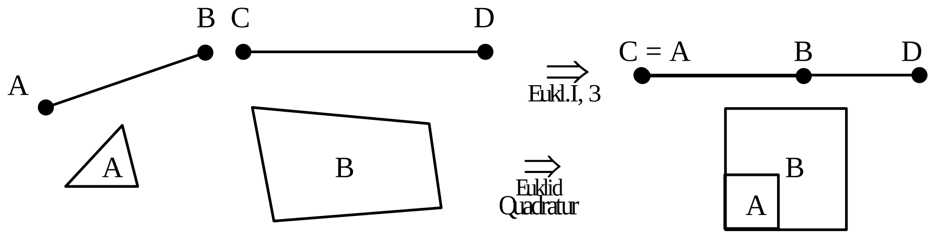
Qualitas *autem est, quod in rebus cognosci potest cum singulatim observantur*, neque opus est compraesentia. Talia sunt attributa quae explicantur definitione aut per varias modificationes quas involvunt.

Aequalia sunt ejusdem quntitatis.
Simila sunt ejusdem qualitatis.

Lage *ist eine Art und Weise des Zusammenseins*. Deshalb schließt sie nicht nur Quantität, sondern auch Qualität ein.

Quantität *bzw. Größe ist das, was bei den Sachen nur im gegenwärtigen Miteinander [Kompraesentia] (bzw. durch simultane Wahrnehmung) erkannt werden kann*.

z. B.



So kann nicht erkannt werden, was ein Fuß, was eine Elle ist, wenn wir nicht tatsächlich etwas als Maß haben, das dann auf anderes angewendet werden kann. Und deshalb kann ein Fuß auch nicht durch irgendeine Definition genügend erklärt werden, die nämlich wiederum etwas derartiges nicht einschließt. Denn, auch wenn wir sagen, dass ein Fuß zwölf Zoll ist, besteht dieselbe Frage bezüglich des Zolls, und wir erlangen daher keine größere Klarheit; auch kann nicht gesagt werden, ob der Begriff des Zolls oder des des Fußes naturgemäß früher ist, weil es im freien Ermessen liegt, was von beiden wir als Basis nehmen wollen.

Qualität *aber ist, was in den Sachen erkannt werden kann, wenn sie einzeln (für sich) betrachtet werden* und kein gegenwärtiges Miteinander [Kompraesentia) notwendig ist. Derartige Dinge sind Attribute, die von einer Definition her erklärt werden oder durch verschiedene Modifikationen, die sie einschließen.

Gleiche [Dinge] sind von derselben Quantität.
Ähnliche [Dinge] sind von derselben Qualität.

Hinc si duo similia sunt diversa, non nisi per compraesentiam distingui possunt.

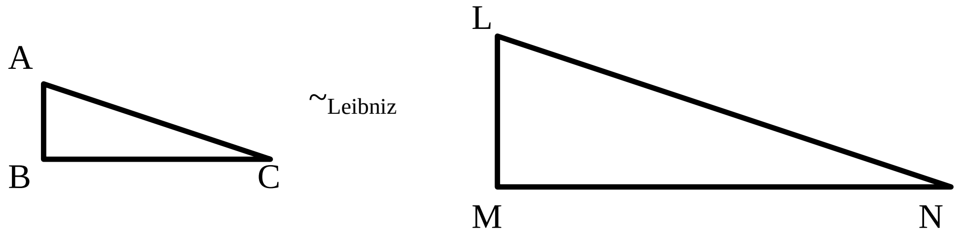
Hinc patet exempli causa, duo Triangula aequiangula habere latera proportionalia vel vicissim[1]. Nam sint latera proportionalia, similia utique sunt triangula, cum simili modo determinentur. Porro in omni triangulo summa angulorum est eadem, cum aequetur duobus rectis; ergo necesse est in uno rationem angulorum respondentium ad summam esse quae in altero; alioqui unum triangulum ab alio eo ipso distingui posset, ex se scilicet seu singulatim spectatum. Ita facile demonstratur quod alias per multos ambages.[2]

Wenn daher zwei ähnliche Dinge verschieden sind, können sie nur durch gegenwärtiges Beisammensein unterschieden werden.

Daher ist zum Beispiel klar, dass zwei winkelgleiche Dreiecke proportionale Seiten haben oder umgekehrt[1]. Sind nämlich die Seiten proportional, sind die Dreiecke notwendig ähnlich, weil sie auf ähnliche Art und Weise bestimmt werden. Es ist ferner in jedem Dreieck die Summe der Winkel dieselbe, weil sie gleich zwei rechten ist. Also ist notwendig von den entsprechenden Winkeln das Verhältnis zur Summe bei dem einen [Dreieck] dasjenige, was es bei dem anderen ist; anderenfalls würde man das eine Dreieck eo ipso vom anderen unterscheiden können, indem es nämlich von sich aus bzw. einzeln betrachtet wird. Auf diese Weise wird leicht bewiesen, was sonst durch viele Umwege [geschieht].[2]

Anmerkung

Einen ausführlichen Beweis dieser Äquivalenz[1] liefert Leibniz in DE ANALYSI SITUS (LMG V, S.181f), wobei sein Begriff der <u>Ähnlichkeit</u> ($\sim_{\text{Leibniz}}$) als <u>Qualitätsidentität</u> die vermittelnde d. h. zentrale Rolle spielt zwischen Winkelgleichheit und Seitenproportionalität, also:

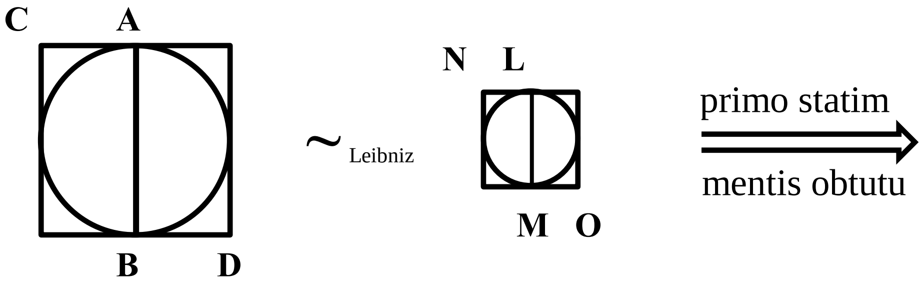


Gleichheit entspr. Winkel $\Leftrightarrow \Delta ABC \sim_{\text{Leibniz}} \Delta LMN \Leftrightarrow$ Identität entspr. Seitenverhältnisse

[1] dazu: DE ANALYSI SITUS (Characteristica geometrica) LMG V, S.178-183;
siehe auch: *Aiton, Eric J.*: G. W. Leibniz, 1. Aufl., S. 147-150, Insel Verlag Frankfurt am Main und Leipzig, 1991

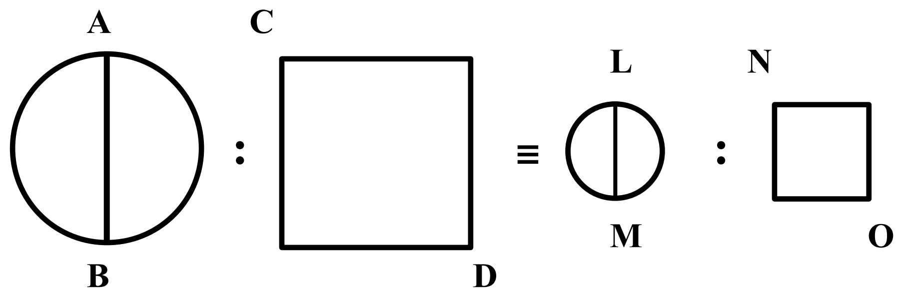
[2] siehe Anhang: *Euklid* VI, 4; VI, 5

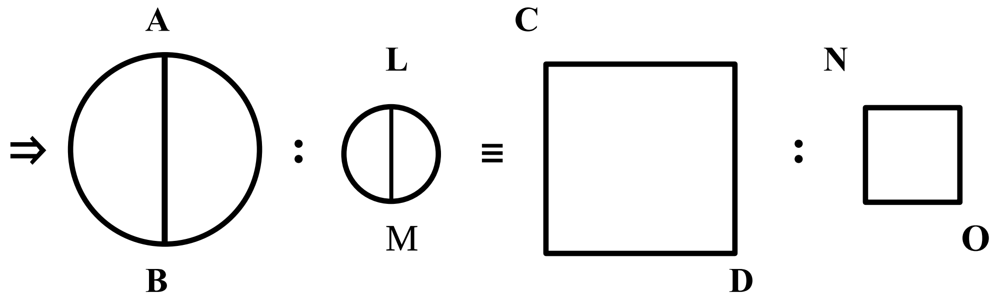
"Eodem modo primo statim mentis obtutu ex nostra similitudinis notione directe ostenditur, *circulos esse ut quadrata diametrorum*, quod Euclides demum decimo libro[3] ostendit, et quidem per inscripta et circumscripta, rem reducendo ad absurdum, cum tamen nullis ambagibus esset opus."



Diametro AB descriptus sit circulus, eique circumscriptum diametri quadratum CD; eodemque modo diametro LM descriptus sit circulus, eique circumscriptum diametri quadratum CD; eodemque modo diametro LM descriptus sit circulus, eique circumscriptum diametri quadratum NO.

In (LMG V, S.182f) heißt es weiter:
"In derselben Weise wird sofort auf den ersten Blick des Geistes aus unserem Begriff der Ähnlichkeit direkt gezeigt, dass *Kreise sich wie die Quadrate der Durchmesser verhalten*, was Euklid schließlich im zehnten Buch[3] gezeigt hat, und zwar mit Einbeschriebenem und Umbeschriebenem durch reductio ad absurdum, obwohl doch keine Umwege nötig wären."





Mit dem Durchmesser AB sei ein Kreis beschrieben, und ihm umschrieben das Quadrat CD des Durchmessers; und in derselben Weise sei mit dem Durchmesser LM ein Kreis beschrieben, und ihm umschrieben das Quadrat NO des Durchmessers.

[3] siehe Anhang: Euklid XII, 1; XII, 2

Determinatio[4] utrobique est similis, circulus circulo, quadratum quadrato, et accommodatio quadrati ad circulum, itaque (per axioma[5] supradictum) figurae ABCD et LMNO sunt similes.
Ergo (per definitionem similitudinis) erit circulus AB ad quadratum CD, ut circulus LM ad quadratum NO; ergo etiam circulus AB ad circulum LM est ut quadratum CD ad quadratum NO, quod affirmabatur.
Pari ratione *sphaerae* ostendentur esse *ut cubi diametrorum*. Et in universum in similibus linae, superficies, solida homologa erunt respective ut longitudines, quadrata, cubi laterum homologorum, quod hactenus generaliter assumtum magis quam demonstratum est.

Porro haec consideratio, quae tantam praebet facilitatem demonstrandi veritates alia ratione difficulter demonstrandas, etiam novum calculi genus nobis aperuit, a calculo algebraico toto coelo diversum, notisque pariter et usu notarum operationibusve novum.

Itaque Analysin situs appellare placet, quod ea situm recta et immediate explicat, ita ut figurae etiam non delineatae per notas in animo depingantur, et quicquid ex figuris imaginatio intelligit

Die Bestimmung[4] ist in beiden Fällen ähnlich, – der Kreis dem Kreis, das Quadrat dem Quadrat und die Anpassung des Quadrats an den Kreis –; deshalb (durch das oben genannte Axiom[5]) send die Figuren ABCD und LMNO ähnlich.
Also wird (durch die Definition der Ähnlichkeit) der Kreis AB zu Quadrat CD sein wie der Kreis LM zum Quadrat NO; also auch der Kreis AB zum Kreis LM wie das Quadrat CD zum Quadrat NO, was behauptet wurde.
Aus dem gleichen Grund wird gezeigt werden, dass sich *Kugeln* wie *die Kuben der Durchmesser* verhalten.[6] Und im Allgemeinen werden bei ähnlichen Dingen sich die Linien, die Oberflächen, die homologen Körper entsprechend verhalten, wie die Längen, Quadrate, Kuben der homologen Seiten, was bis jetzt generell mehr angenommen als bewiesen worden ist.
Diese Betrachtung ferner, die eine so große Leichtigkeit des Beweisens von Wahrheiten liefert, die auf andere Art schwer zu beweisen sind, hat uns auch eine neue Rechenart eröffnet, die vom algebraischen Kalkül himmelweit verschieden ist, und die neu ist ebenso in den Bezeichnungen wie auch im Gebrauch der Bezeichnungen oder in den Operationen.
Deshalb wird es für gut befunden, sie Analysis Situs zu nennen, weil sie die Lage geradewegs und unmittelbar erklärt, und zwar in der Weise, dass auch nichtgezeichnete Figuren durch die Bezeichnungen im Geiste (ab)gemalt werden, und was auch immer die empirische

---

[4] Bestimmung = <u>Determinatio</u> (LMG VII, 29, INITIA MATHEMATICA):

<u>Determinantia sunt, quae simul non nisi uni soli competunt</u>, ut duo extrema A, B non nisi uni competunt rectae.

<u>Determinierend sind Dinge, die zugleich nur auf ein Einziges allein zutreffen</u>, wie zwei äußerste [Punkte] A, B nur auf eine einzige Gerade zutreffen.

[5] <u>Axiom</u> (LMG V, 181):

<u>Quae ex determinantibus (seu datis sufficientibus) discerni non possunt, ea omnino discerni non posse</u>, cum ex determinantibus cetera omnia oriantur.

<u>Dinge, die von den bestimmenden Dingen (bzw. den hinreichenden Daten) her nicht unterschieden werden können, diese können überhaupt nicht unterschieden werden</u>, weil aus den bestimmenden Dingen alle übrigen entstehen.

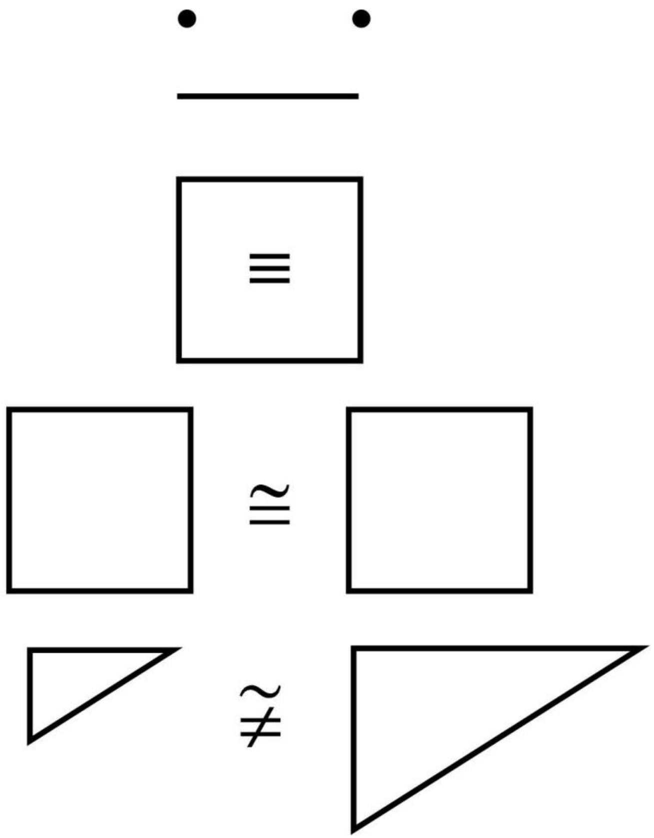
[6] Eukl. XII, 18

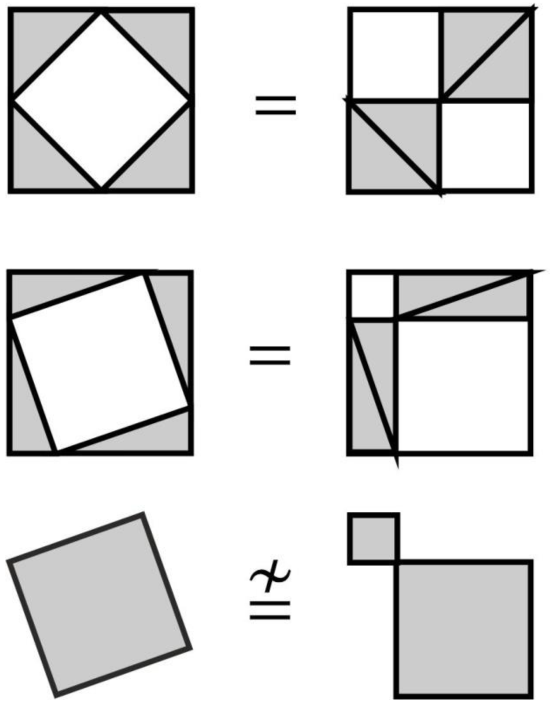
empirica, id ex notis calculus certa demonstratione derivet, caeteraque etiam onmia consequatur, ad quae imaginandi vis pertingere non potest: imaginationis ergo supplementum, et ut ita dicam perfectio in hoc, quem proposui, calculo situs continetur, neque tantum ad Geometriam, sed etiam ad machinarum inventiones, ipsasque machinarum naturae descriptiones usum hactenus incognitum habebit.

Imagination aus den Figuren heraus denkt, das mag der Kalkül aus den Bezeichnungen heraus durch einen sicheren Beweis herleiten und auch alles Übrige verfolgen, wohin das Imaginationsvermögen nicht gelangen kann: es ist also eine Ergänzung der Imagination, und, – um es so zu sagen –, es ist eine Perfektion in diesem Kalkül der Lage, den ich vorgestellt habe, enthalten; und nicht nur bei der Geometrie, sondern auch bei den Erfindungen von Maschinen und den Beschreibungen selbst der Maschinen der Natur wird er einen bis jetzt unbekannten Nutzen haben.

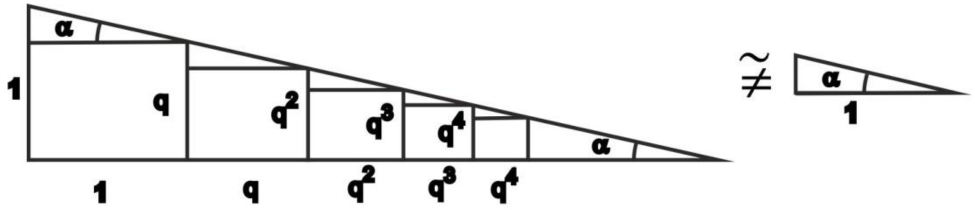
Bildergalerie zur Begriffs- & Formelsammlung

Qualität
Form
Ähnlichkeit
Bestimmung





Quantität
Größe
Gleichheit
Messung



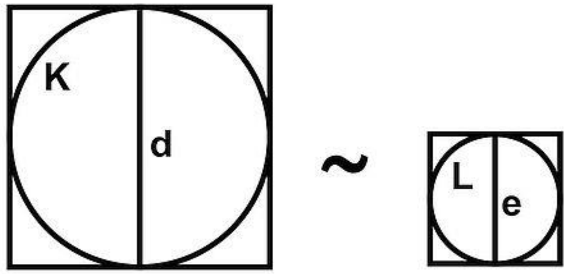
$$\Rightarrow \quad \frac{1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots\ q^\infty}{1} \equiv \frac{1}{1-q}$$

Homogenea sunt quibus dari possunt aequalia similia inter se. Sunto A et B, et possit sumi L aequale ipsi A, et M aequale ipsi B sic ut L et M sint similia, tunc A et B appellabuntur Homogenea.

Hinc etiam dicere soleo, Homogenea esse quae per transformationem sibi reddi possunt similia, ut curva rectae. Nempe si A transformetur in aequale sibi L, potest fieri simile ipsi B vel ipsi M, in quod transformari ponitur B.

$$\begin{matrix} \mathbf{A = L} \\ \mathbf{B = M} \end{matrix},\ \mathbf{L \sim M} \quad \Leftrightarrow: \quad \mathbf{A} \shortparallel\!\sim\!\shortparallel \mathbf{B}$$

Inesse alicui loco dicimus vel alicujus *ingrediens* esse, quod aliquo posito, eo ipso immediate poni intelligitur, ita scilicet ut nullis opus sit consequentiis.



$$\Rightarrow \quad K : d^2 \equiv L : e^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{K}{d^2} = \frac{L}{e^2} = \frac{\pi}{4}$$

Artgleich sind Dinge, für die ihnen gleiche [und] untereinander ähnliche angegeben werden können. Ist A und B gewählt, und kann ein dem A gleiches L und ein dem B gleiches M so gewählt werden, dass L und M ähnlich sind, dann werden A und B artgleich benannt werden.

Daher pflege ich auch zu sagen, dass [Dinge] artgleich sind, die durch eine Transformation einander ähnlich gemacht werden können, wie eine Kurve einer Geraden. Wenn nämlich A in ein ihm gleiches L transformiert wird, kann es einem B oder einem M ähnlich gemacht werden, in das B nach Voraussetzung transformiert ist.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \shortparallel\!\sim\!\shortparallel & \mathbf{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{L} & \sim & \mathbf{M} \end{array}$$

Wir sagen, dass dasjenige in irgendeinem Ort ist oder eine *Ingredienz* von irgendetwas ist, das, wenn irgendetwas gesetzt ist, als von selbst unmittelbar gesetzt verstanden wird, nämlich so, dass keine Schlussfolgerungen nötig sind.

Sic ubi lineam aliquam finitam ponimus, ejus extrema ponimus ejus partes.

Quod inest homogeneum, **Pars** appellatur, et cui inest appellatur **Totum**, seu pars est ingrediens homogeneum.

Terminus communis est, quod duobus inest partem communem non habentibus. Quae quoties intelligantur partes ejusdem Totius, is terminus communis dicetur *Sectio* totius.

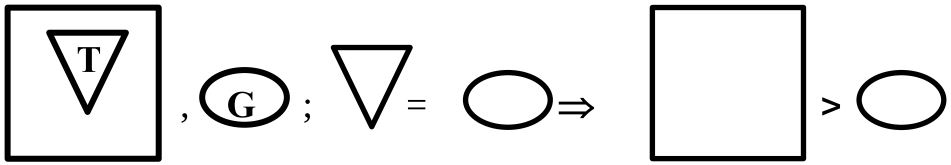
Hinc patet, Terminum non esse homogeneum terminato, nec Sectionem esse homogeneam secto.

Tempus et Momentum, Spatium et Punctum, Terminus et Terminatum, etsi non sint Homogenea, sunt tamen **homogona**, *dum unum in alterum continua mutatione abire potest.*

Locum qui alteri loco *inesse* dicitur, Homogonum intelligimus, quod si ejus sit pars aut parti aequalis, non tantum homogonus sed et homogeneus erit. Angulus etsi ad punctum sit, non tamen est in puncto, alioqui in puncto magnitudo intelligeretur.

Si pars unius sit aequalis alteri toti, illud **Minus**, hoc **Majus**.

Itaque **Totum est majus parte**.



Sit totum A, pars B, dico A esse majus quam B, quia pars ipsius A (nempe B) aequatur toti B. Res etiam Syllogismo exponi potest, cujus Major propositio est definitio, Minor propositio est identica:

Sobald wir so irgendeine endliche Linie setzen, setzen wir ihre äußersten [Dinge] als ihre Teile.

Was in [etwas] als artgleich [enthalten] ist, wird **Teil** genannt, und das, worin es ist, nennt man **Ganzes**, bzw. der Teil ist eine artgleiche Ingredienz.

Eine *gemeinsame Grenze* ist [das], was in zwei [Dingen] ist ohne einen gemeinsamen Teil zu haben. Immer dann, wenn diese [Dinge] als Teile desselben Ganzen verstanden werden, nennt man diese gemeinsame Grenze einen *Schnitt* des Ganzen.

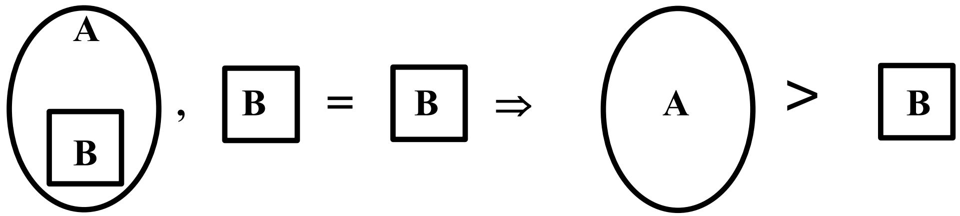
Daher ist klar, dass eine Grenze nicht artgleich dem Begrenzten ist, und dass ein Schnitt nicht artgleich dem Geschnittenen ist.

Zeit und Augenblick, Raum und Punkt, Grenze und Begrenztes, auch wenn sie nicht artgleich sind, [so] sind sie dennoch **artverwandt**, *insofern das eine auf das andere durch stetige Veränderung hinauslaufen kann*.

Einen *Ort*, von dem gesagt wird, *in* einem anderen Ort *zu sein*, verstehen wir als [diesem] artverwandt; wenn er aber ein Teil oder gleich einem Teil von ihm ist, wird er nicht nur artverwandt, sondern auch artgleich sein. Ein Winkel, auch wenn er an einem Punkt ist, ist dennoch nicht in einem Punkt, andernfalls würde in einem Punkt eine Größe gedacht werden.

Wenn ein Teil von Einem gleich einem anderen Ganzen ist, möge jenes [Andere] **kleiner**, dieses **größer** genannt werden.

Deshalb ist ein **Ganzes größer als [s]ein Teil**.



Das Ganze sei A, der Teil B; ich sage, dass A größer als B ist, weil ein Teil von A (nämlich B) gleich dem Ganzen B ist. Die Sache kann sogar mit einem Syllogismus herausgestellt werden, dessen Obersatz eine Definition ist, dessen Untersatz eine Identitäts[aussage] ist:

Quicquid ipsius A parti aequale est, id ipso A minus est, ex deifinitione,

B est aequale parti ipsius A, nempe sibi, ex hypothesi,

ergo B est minus ipso A.

Unde videmus demonstrationes ultimum resolvi in duo indemonstrabilia: Definitiones seu ideas, et propositiones primitivas, nempe identicas, qualis haec est B est B, unumquodque sibi ipsi aequale est, aliaeque hujusmodi infinitae.

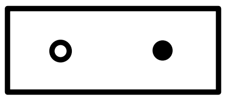
Motus est mutatio situs.

Movetur, in quo est mutatio situs, et simul ratio mutationis.

Mobile est homogonum extenso, nam et punctum mobile intelligitur.

Via est locus continuus successivus rei mobilis.

Vestigium est locus rei mobilis, quem aliquo momento occupat. Hinc vestigium termini est sectio viae quam terminus describit, cum scilicet mobile per sua vestigia non incedit.



Mobile per sua vestigia incidere dicitur, cum quodvis ejus punctum extra terminum in locum alterium puncta ejusdem mobilis continuo succedit.

Quodsi Mobile sic moveri non ponatur, tunc **Linea** est via puncti.

Superficies est via Lineae.

Was auch immer einem Teil von A gleich ist, ist kleiner als A, auf Grund der Definition;

B ist gleich einem Teil von A, nämlich sich selbst, auf Grund der Voraussetzung;

also ist B kleiner als A.

Hieraus ersehen wir, dass Beweise letztlich aufgelöst werden bis zu zwei unbeweisbaren: Definitionen bzw. Ideen und primitive Aussagen, nämlich Identitätsaussagen, - eine derartige ist diese: B ist B, jedes einzelne ist sich selbst gleich, und unendlich viele andere derartige [Aussagen].

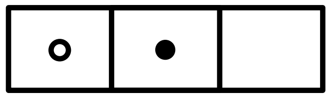
Bewegung ist Veränderung der Lage.

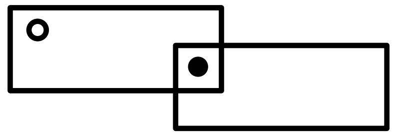
Etwas bewegt sich [in Etwas], in dem eine Veränderung der Lage ist und zugleich der Grund der Bewegung.

Bewegliches ist artverwandt dem Ausgedehnten, nämlich auch ein Punkt wird als [etwas] beweglich[es] gedacht.

Weg ist der stetige sukzessive Ort einer beweglichen Sache.

Spurpunkt ist der Ort einer beweglichen Sache. den sie in irgendeinem Augenblick einnimmt. Daher ist der Spurpunkt einer Grenze ein Schnitt des Weges, den die Grenze beschreibt, nämlich wenn das Bewegliche nicht durch seine Spurpunkte voranschreitet.





Man sagt, dass *Bewegliches durch seine Spurpunkte voranschreitet*, wenn ein beliebiger Punkt von ihm, außerhalb der Grenze gelegen, stetig zum Ort eines anderen Punktes desselben Beweglichen gelangt.

Wenn also nicht vorausgesetzt wird, dass Bewegliches sich nicht so bewegt, dann ist die **Linie** der Weg eines Punktes.

Die **Fläche** ist der Weg einer Linie.

Amplum vel **Spatium** vel ut vulgo solidum est via superficiei.

Magnitudines viarum quibus punctum lineam, linea superficiem, superficies amplum describit, vocantur *longitudo*, *latitudo*, *profunditas*. Vocantur **dimensiones**, et in Geometria ostenditur non nisi tres dari.

Latitudinem habet, cujus datur sectio extensa, seu quod extenso terminatur.

Profunditatem habet, quod extensum non terminat, seu quod sectio extensi esse non potest, in profundo scilicet est plus aliquid quam quod terminus esse possit.

Linea est ultimum terminans extensum.

Amplum est ultimum Terminatum extensum.

punctum	**linea recta**	**superficies planum**	**amplum**

Das **räumliche Gebilde** oder der **Raum** oder, wie man gewöhnlich sagt, der feste Körper ist der Weg einer Fläche.

Die Größen der Wege, mit denen ein Punkt eine Linie, eine Linie eine Fläche, eine Fläche ein räumliches Gebilde beschreibt, nennt man *Länge*, *Breite*, *Tiefe*. Sie werden **Dimensionen** genannt und in der Geometrie wird gezeigt, dass es nur drei gibt.

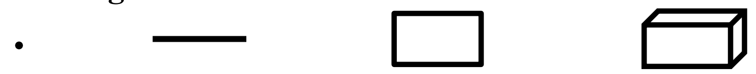
Breite hat [dasjenige], von dem es einen ausgedehnten Schnitt gibt, bzw. was durch Ausgedehntes begrenzt wird.

Tiefe hat [dasjenige], was ein Ausgedehntes nicht begrenzt, bzw. was nicht Schnitt eines Ausgedehnten sein kann; bei dem Tiefen ist nämlich etwas anderes mehr, als was Grenze sein kann.

Eine Linie ist das letzte begrenzende Ausgedehnte.

Ein räumliches Gebilde ist das letzte begrenzte Ausgedehnte.

Punkt	**gerade Linie**	**ebene Fläche**	**räumliches Gebilde**



∞

Similitudo vel dissimilitudo in amplo seu spatio cognoscitur ratione terminorum, itaque *amplum*, cum plus aliquid sit quam quod terminus esse possit, intus ubique simile est. Amplaque quorum omnimodae extremitates coincidunt, congruunt[7], assimilantur, sunt coincidentia, congruentia, similia. Idem est in plano, quod est superficies intus uniformis vel sibi similis, et in *recta*, quae est linea intus sibi similis.

Omnimoda extremitas in Extensis latitudinem habentibus **Ambitus** appellari potest.
Sic ambitus circuli est peripheria, ambitus sphaerae est superficies sphaerica.

Punctum (spatii scilicet) est locus simplicissimus, seu locus nullius alterius loci.

Ähnlichkeit oder Unähnlichkeit wird im räumlichen Gebilde bzw. Raum durch die Art der Grenzen erkannt; deshalb ist das *räumliche Gebilde*, weil es irgendetwas mehr ist, als was eine Grenze sein könne, innen überall ähnlich. Und räumliche Gebilde, deren Extremitäten jedweder Art koinzidieren, kongruieren[7], assimiliert sind, sind [selbst] koinzident, kongruent, ähnlich. Dasselbe ist in der Ebene [der Fall], die innen eine einförmige oder sich [selbst-]ähnliche Fläche ist, und in der *Geraden*, die innen eine sich [selbst]ähnliche Linie ist.

Eine *Extremität jedweder Art* in ausgedehnten [Dingen], die Breite haben, kann **Umfang** genannt werden.
So ist der Umfang eines Kreises die Peripherie; der Umfang einer Kugel ist die Kugel[ober]fläche.

Ein Punkt (des Raumes nämlich) ist der einfachste Ort bzw. der Ort keines anderen Ortes.

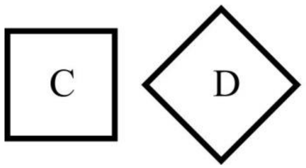
---

[7] LMG VII, 29, INITIA MATHEMATICA:

Coincidentia sunt, quae plane eadem sunt tantumque denominatione differunt, ut via ab A ad B a via a B ad A.

A ______________ **B**

Congrua sunt, quae si diversa sunt, non nisi respectu ad externa discerni possunt, ut quadrata C et D, nempe quod eodem tempore sunt in diverso loco vel situ, vel quod unum C est in materia aurea, alterum D in argentea. Ita congruent libra auri et libra plumbi; dies hodiernus et hesternus.



quodlibet congruit cuilibet alteri, ut et instans instanti.

Koinzident sind Dinge, die völlig dieselben sind und sich nur durch die Benennung unterscheiden, wie der Weg von A nach B vom Weg von B nach A.

$$\mathbf{W \equiv X \wedge W \equiv Y \Leftrightarrow: X \equiv Y}$$

Kongruent sind Dinge, die, wenn sie verschieden sind, nur mit Rücksicht auf äußere Dinge unterschieden werden können, wie die Quadrate C und D, nämlich weil sie zur selben Zeit an verschiedenem Ort oder [in verschiedener] Lage sind, oder weil das eine C in goldener Materie ist, das andere in silbener. So kongruieren ein Pfund Gold und ein Pfund Blei, der heutige und der gestrige Tag.

$$C \cong D \ ; \bullet \cong \bullet$$

Ein beliebiger Punkt kongruiert mit einem beliebigen anderen, wie Punctum auch ein Augenblick mit einem Augenblick.

Spatium absolutum est locus plenissimus seu locus omnium locorum.

Ex uno puncto nihil prosultat.

Ex duobus punctis prosultat aliquid novi, nempe punctum quodvis sui ad ea situs unicum, horumque omnium locus, id est *recta* quae per duo puncta proposita transit.

Ex tribus punctis prosultat *planum*, id est locus omnium punctorum sui ad tria puncta non in eandem rectam cadentia situs unicorum.

Ex quatuor punctis non in idem planum cadentibus prosultat *Spatium absolutum*. Nam quodvis punctum sui ad quatuor puncta in idem planum non cadentia situs unicum est.

Prosultandi vocabulo utor ad ideam indicandam novam, dum ex quibusdam positis aliquid aliud determinatur eo ipso quod suae ad ipsa relationis unicum est. Relatio autem hic intelligitur situs.

Tempus in infinitum continuari potest.[8] Cum enim totum tempus sit simile parti, habebit se ad aliud tempus, ut pars se habet ad ipsum, et ita in alio majore tempore continuari intelligitur.

Similiter et spatium solidum seu amplitudo[9] *continuari in infinitum potest*, quandoquidem ejus pars sumi potest similis toti. Et hinc planum quoque et recta continuantur in infinitum.
Eodem modo ostenditur, spatium velut rectam, itemque tempus,

Der absolute Raum ist der voll[ständig]ste Ort bzw. der Ort aller Orte.

Aus einem einzigen Punkt geht nichts hervor.

Aus zwei Punkten geht irgendetwas Neues hervor, nämlich jeder beliebige Punkt, der bezüglich seiner Lage bei diesen [beiden] der einzige [= der eindeutig bestimmte] ist, und der Ort aller dieser, – das ist die *Gerade*, die durch die zwei vorgelegten Punkte hindurchgeht.

Aus drei Punkten geht eine *Ebene* hervor, – das ist der Ort aller Punkte, die bezüglich ihrer Lage bei den drei nicht auf dieselbe Gerade fallenden Punkten die einzigen sind.

Aus vier nicht in dieselbe Ebene fallenden Punkten geht der *absolute Raum* hervor. Denn jeder beliebige Punkt ist der einzige bezüglich seiner Lage bei den vier nicht in dieselbe Ebene fallenden Punkten.

Die Vokabel *'hervorgehen'* gebrauche ich um eine neue Idee anzuzeigen, wobei aus gewissen gesetzten Dingen etwas anderes von selbst bestimmt wird, was bezüglich seiner Beziehung zu diesen das Einzige ist. Als Beziehung wird hier aber die Lage verstanden.

Die Zeit kann nach Unendlich fortgesetzt werden.[8] Denn weil eine Zeit als Ganzes einem Teil [von ihm] ähnlich ist, wird es sich zu einer anderen Zeit [als Ganzes] verhalten, wie sich der Teil zu ihm selbst verhält und in der Weise gedacht werden, dass es in eine andere größere Zeit [als Ganzes] fortgesetzt wird.

Ähnlich kann auch der Raum als fester Körper bzw. die Weite[9] *nach Unendlich fortgesetzt werden*, da ja ein Teil von ihm als dem Ganzen ähnlich [an]genommen werden kann. Und daher werden auch eine Ebene und eine Gerade bis nach Unendlich fortgesetzt. In derselben Weise wird gezeigt, dass ein Raum sowie eine Gerade und

---

[8] zur Begründung der potenziell unendlichen Zeit: $\mathbf{G} \underset{\sim}{} \mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{G} : \mathbf{G} \equiv \mathbf{T} : \mathbf{G} \underset{\mathbf{T}<\mathbf{G}}{\Rightarrow} \mathbf{G} < \mathbf{G}$ (?)

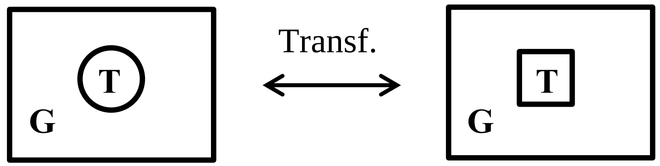
[9] vergl.: amplum – spatium – solidum, S. 12

et in universum continuum in infinitum[10] subdividi posse.

ebenso eine Zeit und allgemein ein Kontinuum nach Unendlich[10] unterteilt werden können.

Nam in recta et in tempore pars est similis toti atque adeo in eadem ratione secari potest, qua totum, et licet sint extensa, in quibus pars non est similis toti, possunt tamen transformari in talia, et in eadem ratione secari, in qua ea, in quae transformantur.

Denn in einer Geraden und in einer Zeit ist ein Teil einem Ganzen ähnlich, und deshalb kann er auf dieselbe Art [in demselben Verhältnis] geteilt werden wie ein Ganzes; und selbst wenn es ausgedehnte [Dinge] sind, in denen ein Teil nicht einem Ganzen ähnlich ist, [so] können sie dennoch in derartige transformiert werden und in demselben Verhältnis geteilt werden, in welchem diejenigen [geteilt sind], in die sie transformiert werden.



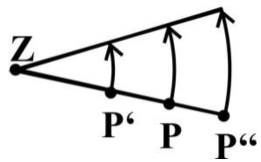
Sequitur etiam ex his, *quovis* motu posse assumi celeriorem et tardiorem in data ratione:

Hieraus folgt auch, dass mit einer *beliebigen* Bewegung eine in einem gegebenen Verhältnis schnellere und langsamere angenommen werden kann:

radio enim rigido circa centrum acto motus punctorum sunt ut distantiae eorum a centro, itaque celeritates variari possunt ut rectae.

denn mit einem um ein Zentrum geführten starren Radius sind [verhalten sich] die Bewegungen der Punkte wie ihre Abstände vom Zentrum; deshalb können Geschwindigkeiten verändert werden wie Geraden.

$$\mathbf{r' < r \;\Rightarrow\; v' < v \;,\; r < r'' \;\Rightarrow\; v < v''}$$



$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{v' : v \;\equiv\; r' : r} \\ \mathbf{v : v'' \;\equiv\; r : r''} \end{array}}$$

Aestimatio magnitudinum duplex est, imperfecta et perfecta; imperfecta, cum aliquid majus minusve altero dicimus, quamvis non sint homogenea, nec habeant proportionem inter se, quemadmodum si quis diceret, Lineam esse majorem puncto, aut superficiem linea. Et tali modo Euclides dixit, Angulum

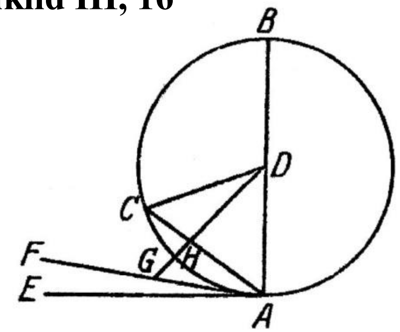
Die **Abschätzung** von Größen [Größenvergleichung] ist zweifach, unvollkommen und vollkommen; unvollkommen ist sie, wenn wir sagen, irgendetwas sei größer oder kleiner als ein anderes, obwohl sie weder artgleich sind noch untereinander eine Proportion haben; so als ob man sagte, eine Linie sei größer als ein Punkt oder eine Oberfläche [größer] als eine Linie. Und in einer solchen Weise hat Euklid gesagt,

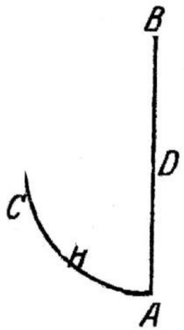
10 *in infinitum* = unendlich oft **(?)**

contactus esse minorem quovis [acuto] rectilineo, etsi revera nulla inter hos toto genere diversos sit comparatio, quin nec homogenea sunt, nec continua mutatione ab uno in alterum transiri potest.

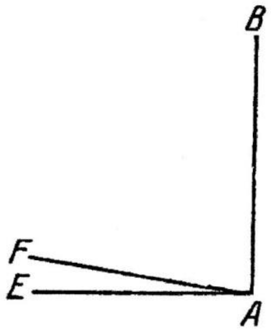
dass ein Winkel der Berührung (Kontingenzwinkel) kleiner ist als ein beliebiger geradliniger, auch wenn es zwischen diesen der ganzen Art nach verschiedenen [Winkeln] gar keinen Vergleich gibt, da es weder artgleiche [Dinge] sind, noch man durch eine stetige Veränderung von dem einen in das andere übergehen kann.

Euklid III, 16

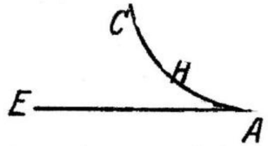




Halbkreiswinkel $>$



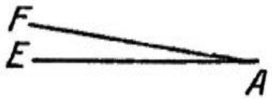
geradlinige spitze Winkel $>$



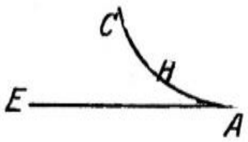
Kontingenzwinkel

Bemerkung

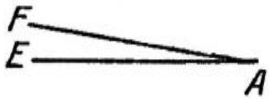
Euklid begründet indirekt die oben dargestellte "<"-Relation mit dem zu Anfang von III, 16 bewiesenen Argument, dass sich keine Gerade AF in den Zwischenraum des Kontingenzwinkels so einschieben lässt, dass also diese Fläche bzw. der Winkel geteilt wird. Dieses Argument führt aber gerade eben zur Nichtanwendbarkeit der Leibnizschen Definition der "<"-Relation.
Gemäß der Definition von "kleiner-größer" auf Seite 10 hat man:

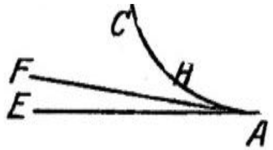


$<$



$\Longleftarrow$





Winkel β $<$ Winkel α Winkel β = Winkel β und Winkel β ist Teil von Winkel α.

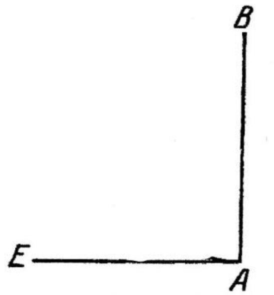
In aestimationibius perfectis inter homogenea obtinet haec regula, ut transeundo continue ab uno extremo ad aliud, transeatur per omnia intermedia; sed non obtinet in imperfectis, quia quod medium dicitur heterogeneum est, itaque transeundo continue ab angulo acuto dato ad angulum rectum non transitur

die Regel, dass man beim stetigen Übergang von einem Extremum zum anderen durch alle Dinge dazwischen hinübergeht; sie gilt aber nicht bei den unvollkommenen [Abschätzungen], weil ein als Mittleres genanntes artverschieden ist; deshalb geht man beim stetigen Übergang von einem gegebenen spitzen Winkel zum rechten Winkel nicht hinüber durch den Winkel eines Halbkreises bzw. des Radius an per Angulum semicirculi seu radii ad circumfrentiam, etsi is Angulo recto minor, et quovis acuto major dicatur, id [Minus] enim hic sumitur improprie pro eo quod intra alterum cadit.

dem Umfang, auch wenn dieser kleiner als der rechte und größer als ein beliebiger spitzer Winkel genannt wird; das "kleiner"[11] wird hier nämlich uneigentlich gebraucht für das, was innerhalb eines Anderen fällt.

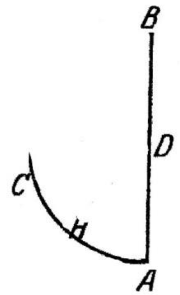
Bemerkung

Kein stetiger Übergang vom „kleineren“ zum „größeren“ artgleichen Winkel durch einen „mittleren“ andersartigen.



rechter Winkel

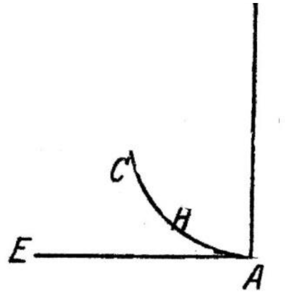
>



Halbkreiswinkel

>

spitzer Winkel



Im Unterschied zur Situation des spitzen Winkels <u>am</u> Kontingenzwinkel liegt der Halbkreiswinkel (wie auch der Kontingenzwinkel) <u>im</u> rechten Winkel. Da der geradlinige rechte Winkel und der gemischtlinige Halbkreiswinkel (bzw. der Kontingenzwinkel) kein artgleiches Paar bilden, ist (nach der Definition von Leibniz) der letztere kein Teil des ersteren Winkels (siehe dazu Seite 10).

Plures secundum quantitatem dantur relationes; sic duae rectae possunt eam habere Relationem inter se, ut summa earum aequetur constanti rectae. Et infinita possunt dari paria rectarum hanc relationem inter se habentia, nempe x et y, ita ut sit x + y = a, si verb. gr. sit ut 10, possunt x et y esse ut 1 et 9, ut 2 et 8, ut 3

Bezüglich der Quantität gibt es mehrere Relationen; so können zwei Geraden untereinander die Relation haben, dass ihre Summe gleich einer konstanten Geraden ist. Und es können unendlich viele Paare von Geraden gegeben werden, die untereinander diese Relation haben, nämlich x und y, sodass x + y = a ist. Wenn z. B. a wie 10 ist,

[11] Minus geändert aus Majus (???)

et 7, ut 4 et 6, ut 5 et 5, ut 6 et 4, ut 7 et 3, ut 8 et 2, ut 9 et 1. Sed possunt etiam infiniti sumi fracti infra 10, qui satisfaciunt.

Sic datur relatio talis inter duas rectas x et y, ut quadrata earum simul sumta aequentur quadrato dato rectae a, ita fiet $xx + yy = aa$: et talium etiam dari possunt paria infinita, et haec est in Circulo relatio sinus complementi ad sinum vel contra, nam uno posito x, alter est y, radius autem est a.

Et tales relationes possunt fingi infinitae, tot quot species linearum in plano describi possunt. Veluti si x sint abscissae ex recta directrice, y erunt ordinatae inter se parallelae ad abscissas applicatae, quae terminantur in Linea. Sed omnium Relationum simplicissima est, quae dicitur **Ratio** vel **Proportio**, eaque est Relatio duarum quantitatum homogenearum, quae ex ipsis solis oritur sine tertio homogeneo assumto.

Veluti si sit y ad x ut numerus ad unitatem seu $y = nx$, quo casu x positis abscissis, y ordinatis, locus est recta, locus inquam seu Linea quam ordinatae terminantur.
Ex quo etiam patet, si esset aequatio localis cujuscunque gradus velut $\ell x^3 + my^3 + nxxy + pxyy = 0$, ubi ℓ, m, n, p sint meri numeri[12], locum ad quem sit aequatio fore rectam et datam esse rationem ipsarum x et y.

Sint datae duae rectae, quae inter se comparentur utcunque. Verb. gr. detrahatur minor ex majore, quotis fieri potest, et residuum rursus ex minore, et ita porro residuum ex

können x und y sein wie 1 und 9, wie 2 und 8, wie 3 und 7, wie 4 und 6, wie 5 und 5, wie 6 und 4, wie 7 und 3, wie 8 und 2, wie 9 und 1. Aber es können auch unendlich viele Brüche unter 10 genommen werden, die [der Aufgabe] genügen.
So gibt es zwischen zwei Geraden x und y eine Relation der Art, dass ihre Quadrate zugleich genommen dem gegebenen Quadrat einer Geraden a gleich ist; so wird $xx + yy = aa$ werden: und von derartigen [Geraden] können sogar unendlich viele Paare gegeben werden und diese Relation ist beim Kreis die des Kosinus zum Sinus oder umgekehrt, denn mit dem einen als x gesetzt ist der andere (Term?] y, der Radius aber ist a.

Und man kann sich unendlich viele derartige Relationen ausdenken, eben so viele wie Arten von Linien in der Ebene beschrieben werden können. Wenn z. B. x die Abszissen [Abschnitte] von einer geraden Directrix sind, werden y die an die Abschnitte angelegten untereinander parallelen Ordinaten sein, die bei der Linie enden. Von allen Relationen aber ist die einfachste, die **Verhältnis** oder **Proportion** genannt wird, und es ist ein Verhältnis zweier artgleicher Quantitäten, das aus diesen allein entsteht ohne ein drittes hinzugenommenes artgleiches [Ding].
Wenn z. B. y zu x wie eine Zahl zu einer Einheit bzw. $y = nx$ ist, - in diesem Fall werden die x als Abszissen, die y als Ordinaten gesetzt -, ist der Ort eine Gerade, Ort sage ich bzw. Linie, bei der die Ordinaten enden. Von daher ist auch klar, dass, wenn sie [die Relation] eine Ortsgleichung eines beliebigen Grades wie z. B. $\ell x^3 + my^3 + nxxy + pxyy = 0$ wäre, wobei ℓ, m, n, p reine Zahlen[12] sind, der Ort, zu dem die Gleichung gehört eine Gerade sein wird, und dass das Verhältnis der x und y ein gegebenes ist.

Gegeben seien zwei Geraden, die untereinander irgendwie verglichen werden sollen. Z. B. werde die kleine von der größeren abgezogen, sooft es geschehen kann, und der Rest wiederum von der kleineren, und so weiter der Rest von jenem, sooft es geschehen kann,

[12] merus numerus = reine Anzahl ≠ Null ?

illo quod quoties fieri potest est detractum, donec vel sequatur exhaustio, ultimo subtrahendo existente communi Mensura, si quantitates sunt commensurabiles, vel habeatur lex progressionis in infinitum, si sint incommensurabiles[13]. Et eadem erit series numerorum Quotientium, cum eadem est proportio.

Nempe si sit a ad b ut $\ell + \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+etc.}}}$ ad unitatem,

erit ℓ, m, n, p etc. series numerorum quotientium.

Verb. gr. si a sit 17 et b sit 5, series tantum constabit ex tribus l, m, n, qui numeri erunt 3,2, 2.

abgezogen ist, bis entweder eine Ausschöpfung erfolgt, – mit dem letzten vorhandenen Abzuziehenden als einem gemeinsamen Maß, wenn die Quantitäten kommensurabel sind –, oder man erhält ein Gesetz des Voranschreitens nach Unendlich, wenn sie inkommensurabel sind[13]. Und es wird dieselbe Reihe von Quotientenzahlen sein, wenn die Proportion dieselbe ist.

Wenn nämlich a zu b ist wie $\ell + \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+etc.}}}$ zur Einheit,

wird ℓ, m, n, p etc. die Reihe der Quotientenzahlen sein.

Wenn z. B. a 17 und b 5 ist, wird die Reihe nur aus den drei ℓ, m, n bestehen, welche die Zahlen 3, 2, 2 sein werden.

5	**5**	**5**	**2**

1	**2**	**2**

1	**1**

	Reste	**Quotienten**(zahlen)
$17 = \underline{3} \cdot 5 +$	2	$\underline{3}$
$5 = \underline{2} \cdot 2 +$	1	$\underline{2}$
$2 = \underline{2} \cdot 1 +$	0	$\underline{2}$

$$\frac{17}{5} = \frac{3\cdot 5+2}{5} = 3+\frac{2}{5}$$

$$= 3+\frac{1}{\frac{5}{2}} = 3+\frac{1}{\frac{2\cdot 2+1}{2}} = 3+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$$

$$= 3+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{2}{1}}} = 3+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{2\cdot 1+0}{1}}} = 3+\frac{1}{2+\frac{1}{2+0}}$$

---

[13] Euklid VII, 1-2; X, 2 – Euklidischer Algorithmus der Wechselwegnahme

Si a et b sint partes rectae extrema et media ratione sectae, erit a major ad b minorem, ut

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}$$ ad unitatem;

quotientes erunt unitates, et series eorum ibit in infinitum.

Bemerkung

Zum Kettenbruch von $\sqrt{2}=a=1+\frac{1}{1+a}=\ldots$

siehe Anhang "Euklidischer Algorithmus …"

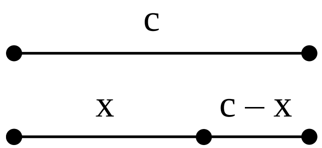
Wenn a und b die Teile einer im äußersten und mittleren Verhältnis geteilten Geraden sind, wird das größere a zum kleineren b sein wie

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}$$ zur Einheit;

die Quotienten werden Einheiten sein, und ihre Reihe wird nach Unendlich gehen.

Bemerkung

Euklid VI Def. 3: Stetige Teilung bzw. Goldener Schnitt



Für die dreiteilige Proportion
c : x : c – x sei c : x ≡ x : c – x.

Also $$\sigma=\frac{c}{x}=\frac{x}{c-x}=\frac{1}{\frac{c}{x}-1}=\frac{1}{\sigma-1}=1+\frac{2-\sigma}{\sigma-1}$$

$$=1+\frac{1}{\frac{\sigma-1}{2-\sigma}}=1+\frac{1}{1+\frac{2\sigma-3}{2-\sigma}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{2-\sigma}{2\sigma-3}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{5-3\sigma}{2\sigma-3}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1+\text{etc.}}}}$$

Sic a et b quaecunque rectae a et b erunt ad se invicem ut $\frac{\ell}{1}+\frac{m}{2}+\frac{n}{4}+\frac{p}{8}+\frac{q}{16}+\text{etc. ad } 1,$ posito ℓ, m, n, p, q, etc. esse 0 vel 1, quae series vel finitur vel periodica est, cum numeri sunt commensurabiles.[14]

Ex his sequitur, lineas similes esse in ratione rectarum Homologarum[15], superficies similes ut rectarum homologarum quadrata, solida similia ut earum[16] cubos.

Sint duo Extensa similia A et L, et homologa homogenea et B et M. Quia A cum B seu A; B simile est ipsi L cum M seu L; M, erit ratio A ad B eadem quae L ad M alioqui ipsum A; L ab ipso B; M aliter quam per compraesentiam[17] distingui posset; prodibunt enim alii numeri rationem exprimentes. Ergo permutando erit A ad L ut B ad M, ut ponebatur. Sic ostendetur circulos esse ut quadrata diametrorum, sphaeras ut cubos diametrorum. Circuli (sphaerae) erunt A et L, quadrata homologa (cubi homologi) B est M.[18]

Ex his manifestum est, **Numerum** in genere – integrum, fractum, rationalem, surdum, ordinalium, transcendentem – generali notione definiri posse, ut sit id quod homogeneum est Unitati, seu quod se habet ad Unitatem, ut recta ad rectam.

So werden irgendwelche Geraden a und b zueinander gegenseitig sein wie $\frac{\ell}{1}+\frac{m}{2}+\frac{n}{4}+\frac{p}{8}+\frac{q}{16}+\text{etc. zu } 1,$ mit ℓ, m, n, p, q, etc. als 0 oder 1 gesetzt; entweder endet diese Reihe oder sie ist periodisch, – wenn die Zahlen kommensurabel sind.[14]

Hieraus folgt, dass Linien in einem Verhältnis homologer[15] Geraden sind, ähnliche Oberflächen wie die Quadrate homologer Geraden, ähnliche Körper wie deren[16] Kuben.

Es seien A und L zwei ausgedehnte ähnliche Dinge und sowohl B als auch M die homologen artgleichen. Weil A mit B bzw. (A; B) ähnlich ist dem L mit M bzw. (L; M), wird das Verhältnis A zu B dasselbe sein wie L zu M, sonst könnte (A; L) von (B, M) anders unterschieden werden als durch Kompraesentia[17]; es werden nämlich andere Zahlen hervorgehen, die das [entsprechende] Verhältnis ausdrücken. Also wird durch Vertauschung A zu L wie B zu M sein, wie es [voraus]gesetzt war. So wird gezeigt werden, dass Kreise wie die Quadrate der Durchmesser sind, Kugeln wie die Kuben der Durchmesser. Die Kreise (Kugeln) werden A und L sein, die homologen Quadrate (homologen Kuben) B und M.[18]

Es ist daher offenbar so, dass die **Zahl** im Allgemeinen – die natürliche, gebrochene, rationale, Wurzel, Ordnungs[zahl], transzendente – durch einen allgemeinen Begriff so definiert werden kann, dass es dasjenige ist, was artgleich der Einheit ist, bzw. was sich zur Einheit verhält wie eine Gerade zu einer Geraden.

---

[14] anschauliche Begründung, logischer Beweis?
[15] homolog = verhältnisgleich, vgl. Seite 7
[16] earum geändert aus eorum
[17] gegenwärtiges Zusammensein, vgl. Seite 4 unten
[18] Euklid XII, 2: $\frac{K1}{K2}=\frac{d_1^2}{d_2^2}$

Manifestum est etiam, si Ratio a ad b consideretur ut numerus qui sit ad Unitatem, ut recta a ad rectam b[19], fore Rationem ipsam homogeneam Unitati; Unitatem autem repraesentare Rationem aequalitatis.[20]

Notandum est etiam, totam doctrinam Algebraicam esse applicationem ad quantitates Artis Combintoriae, seu doctrinae de Formis abstractae animo, quae est Characteristica in universum, et ad Metaphysicam pertinet. Sic productum multiplicatione a + b + c + etc. per l + m + n + etc. nihil aliud est quam summa omnium binionum ex diversi ordinis literis, et productum ex tribus ordinibus invicem ductis, a + b + c + etc. in s + t + v + etc. fore summam omnium ternionum ex diversi ordinis literis; et ex aliis operationibus aliae prodeunt formae.

Hinc in calculo non tantum lex homogeneorum, sed et justitiae utiliter observatur, ut quae eodem modo se habent in datis vel assumtis, etiam eodem modo se habeant in quaesitis vel prove-nientibus, et qua commode licet inter operandum eodem modo tractentur;

Es ist offenbar auch so, dass, – wenn ein Verhältnis a zu b wie eine Zahl betrachtet wird, die zur Einheit ist wie eine Gerade a zu einer Geraden b[19] –, das Verhältnis selbst artgleich der Einheit sein wird; dass die Einheit aber das Verhältnis der Gleichheit repräsentiert.[20]

Es muss auch bemerkt werden, dass die ganze algebraische Lehre eine Anwendung der Kombinationskunst auf Quantitäten ist bzw. einer gedanklich abstrahierten Lehre über Formen, die eine Charakteristica im Allgemeinen ist und zur Metaphysik gehört. So ist das Produkt durch Multiplikation von a + b + c + etc. mit l + m + n + etc. nichts anderes als die Summe aller Binione aus den Buchstaben einer unterschiedlichen Anordnung und das Produkt aus den drei miteinander multiplizierten Anordnungen a + b + c + etc. mal s + t + v + etc. wird die Summe aller Ternione aus den Buchstaben einer unterschiedlichen Anordnung sein; und aus anderen Operationen gehen andere Formen hervor.
Daher wird im Calculus nicht nur das Gesetz der artgleichen [Dinge], sondern auch der Justicia nützlich be(ob)achtet,

WIRD WEITER BEARBEITET!!!

[19] $\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{b}}{1}=\frac{\text{Gerade a}}{\text{Gerade b}}$

[20] $1=\frac{a}{b}\equiv\frac{1}{1}\Leftrightarrow a=b$

INITIA RERUM MATHEMATICARUM METAPHYSICA.

METAPHYSISCHE ANFÄNGE MATHEMATISCHER SACHEN.

GML VII, 3 (Seite 28 f.) INITIA RERUM …

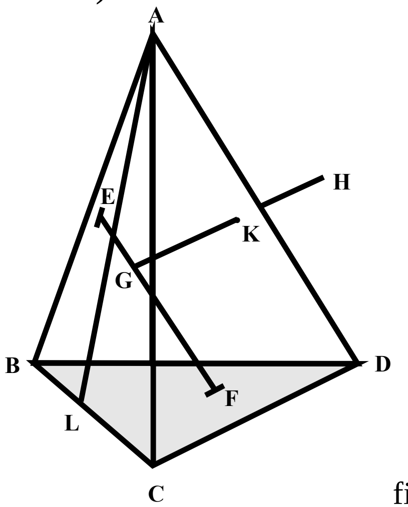


fig. 1

GML VII, 3 (Seite 28 f.)

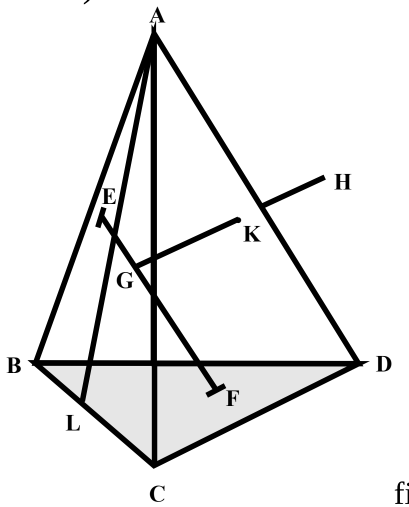


fig. 1

[Dieser letzte Abschnitt der "Initia Rerum …" befindet sich <u>nicht</u> in den Texten von Herring bzw. Buchenau.]

Sunto quatuor puncta A, B, C, D (fig. 1). Hinc dantur sex rectae AB, AC, AD, BC, BD, CD;
sed sufficunt AB, AC, AD, nam tres reliquae ex his nascuntur.

Prosultanibus his tribus rectis, prosultant et omnia earum puncta, et rectae conjungentes duo quaevis diversarum rectarum puncta, locusque adeo harum rectarum omnium.
Porro habemus et quatuor plana per A, B, C, per A, B, D, per A, C, D, per B, C, D, quorum duo quaevis sectionem habent rectam commune; verb. gr. plana per A, B, C et per B, C, D habent communem sectionem rectam per B, C.
Haec quatuor plana claudent spatium quatuor Triangulis planis ABC, ABD, ACD, BCD, quae spatii ambitum facient.

Genommen sind vier [nicht in einer Ebene liegende] Punkte A, B C, D. Von hier aus ergeben sich sechs Geraden AB, AC, AD, BC, BD, CD; es genügen aber AB, AC, AD, denn die übrigen drei werden von diesen erzeugt.
Mit diesen drei auftretenden Geraden treten auch alle ihre Punkte auf, und die Geraden, die zwei beliebige Punkte von verschiedenen Geraden verbinden, und deshalb der Ort aller dieser Geraden.
Ferner haben wir auch vier Ebenen durch A, B, C, durch A, B, D, durch A, C, D, durch B, C, D, von denen zwei beliebige als Schnitt eine gemeinsame Gerade haben; z. B. haben die Ebenen durch A, B, C und durch B, C, D als gemeinsamen Schnitt die Gerade durch B, C.
Diese vier Ebenen werden einen Raum einschließen durch die vier ebenen Dreiecke ABC, ABD, ACD, BCD, die den Umfang des Raumes bilden werden.

Et recta quaevis EF, duo puncta E et F duorum planorum ABC, BCD, conjugens, habet omnia puncta ut G intra hoc spatium, ita ut ex puncto G rectae extremis interjecto nulla recta educi possit, quae non in ambitum cadat.

Claudunt autem spatium quae ambitum constitnuunt plenum, nempe talem, ut linea quaecunque ducta in parte ambitus ubi pervenit ad ejus partis extremum, continuari possit in alia ambitus parte.

Ex. gr. recta AL in parte Ambitus ABC ducta, ubi pervenit ad extremum ejus L, continuari non posset in alia ambitus parte, si abesset triangulum BCD, quod cum caeteris tribus ABC, ABD, ACD spatii claudendi opus absolvit.

Ponatur illa recta produci quantum opus est ad punctum H, quod magis absit a puncto G, quam omnia puncta triangulorum ABC, ABD, ACD, BCD.
Ex puncto H agantur normales in quatuor plana et itidem ex puncto G, reperietur aliquod ex his planis planum, respectu cujus normales amborum non sint ad easdem partes; aliquod ex his planis debet GH secare in triangulo cujus planum est continuatio; dico rectam GH si opus productam[1] cadere in aliquod ex his planis.
Sumatur aliud quodcunque punctum H, ajo rectam GH productam si opus occurrere uni triangulorum quatuor ut ipsi ABD in K, planum per E, F, H secabit plana ABD, ABC[2], BCD, quae tres rectae[3] constituent triangulum cujus duo latera cadent in duo ex triangulis tribus dictis, et punctum G intra hoc triangulum cadet.

[1] Ist nach Konstruktion überhaupt hier ein Fall möglich, für den die Verlängerung nötig ist?
[2] ABC aus ADC
[3] bzw. Schnitte

Und eine beliebige Gerade EF, die zwei Punkte E und F der zwei Ebenen ABC, BCD verbindet, hat alle Punkte wie G innerhalb dieses Raumes so, dass vom Punkt G, der zwischen den äußersten [Punkten] der Geraden liegt, keine Gerade herausgeführt werden kann, die nicht auf den Umfang fallen sollte.
Es schließen aber einen Raum die [Dinge] ein, die einen vollstän-digen Umfang zustande bringen, – einen derartigen nämlich, dass eine beliebige in einem Teil des Umfangs gezogene Linie, sobald sie bei einem äußersten [Punkt] ihres Teils angekommen ist, fortgeführt werden kann in einem anderen Teil des Umfangs.
Es könnte z. B. die in dem Teil ABC des Umfangs gezogene Gerade AL, sobald sie bei seinem äußersten [Punkt] L angekommen ist, nicht in einem anderen Teil des Umfangs fortgesetzt werden, wenn das Dreieck BCD abwesend wäre, das mit den übrigen Dreiecken ABC, ABD, ACD das Werk des einzuschließenden Raumes vollendet.
Es möge jene Gerade [so] gesetzt sein, dass sie so weit wie nötig zu einem Punkt H verlängert wird, der weiter vom Punkt G entfernt ist als alle Punkte der Dreiecke ABC, ABD, ACD, BCD.
Vom Punkt H mögen Normale zu den vier Ebenen gezogen werden, ebenso vom Punkt G; man wird irgendeine Ebene von diesen Ebenen finden, rücksichtlich welcher die Normalen der beiden [Punkte] nicht auf derselben Seite seien; irgendeine von diesen Ebenen muss GH schneiden in einem Dreieck, dessen Ebene die Fortsetzung ist; ich sage, dass die notfalls verlängerte[1] Gerade GH auf irgendeine von diesen Ebenen fällt.
Es sei irgendein beliebiger Punkt H genommen; ich behaupte, dass die notfalls verlängerte Gerade GH einem der vier Dreiecke entgegenläuft, wie dem ABD zu K hin; die Ebene durch E, F, H wird ABD, ABC[2], BCD schneiden; diese drei Geraden[3] werden ein Dreieck zustande bringen, von dem zwei Seiten auf zwei von den besagten Dreiecken

Recta ergo quaecunque transiens per G alterutrum ex illis duobus lateribus secabit, ergo et recta GH, ergo recta GH occurrit uni ex triangulis ABC[4], ABD, BCD in K.

Eodem modo ostendetur, et alio extremo occurrere uni ex aliis tribus triangulis.

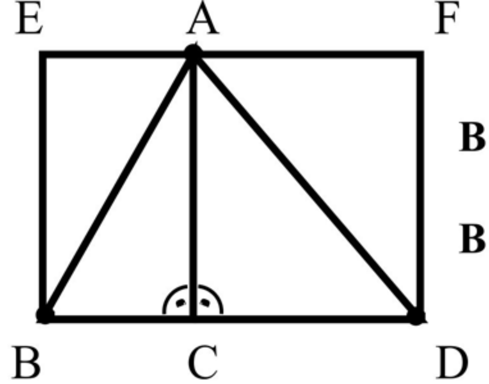
Sed brevius rem ostendemus.

fallen werden, und der Punkt G wird innerhalb dieses Dreiecks fallen.
Also wird eine beliebige durch G verlaufende Gerade eine der beiden von jenen zwei Seiten schneiden, also auch die Gerade GH; also läuft die Gerade GH einem der Dreiecke ABC[4], ABD, BCD zu K hin entgegen.
Auf dieselbe Art wird gezeigt werden, dass sie auch einem anderen äußersten [Dreieck] entgegenläuft, einem von den anderen drei Dreiecken.
Aber diese Sache werden wir kürzer zeigen.

[4] ABC aus ACD

Anhang

Euklid VI. 1



EF || BD

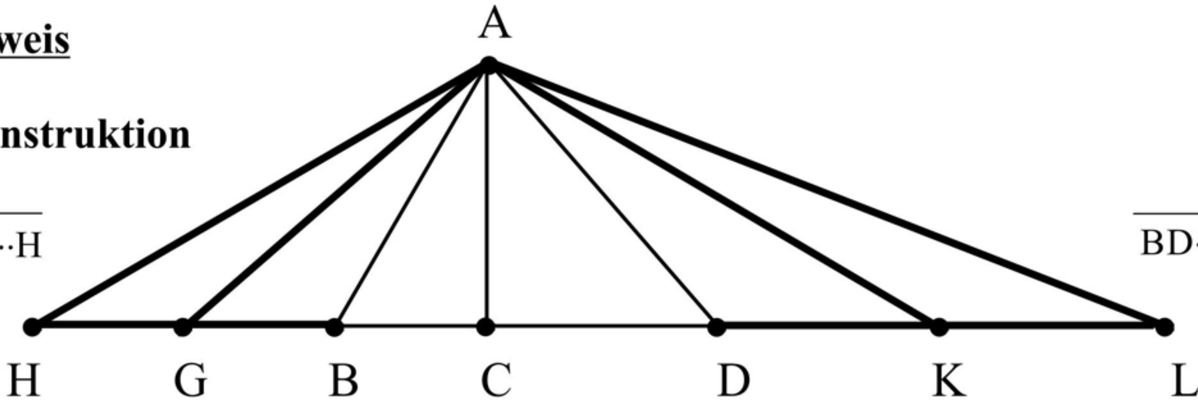
$$BC : CD \overset{\text{Satz}}{\underset{\text{VI. 1}}{\equiv}} \Delta ABC : \Delta ACD$$

$$BC : CD \overset{\text{Satz}}{\underset{\text{VI. 1}}{\equiv}} \square EC : \square CF$$

Beweis

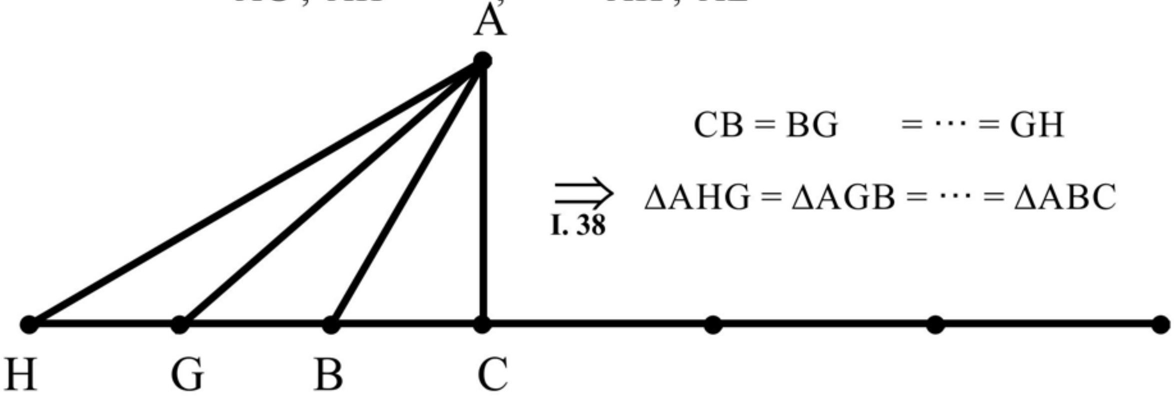
Konstruktion

$\overline{DB \cdots H}$ $\overline{BD \cdots L}$



$BC = BG = \cdots = GH$; $CD = DK = \cdots = KL$

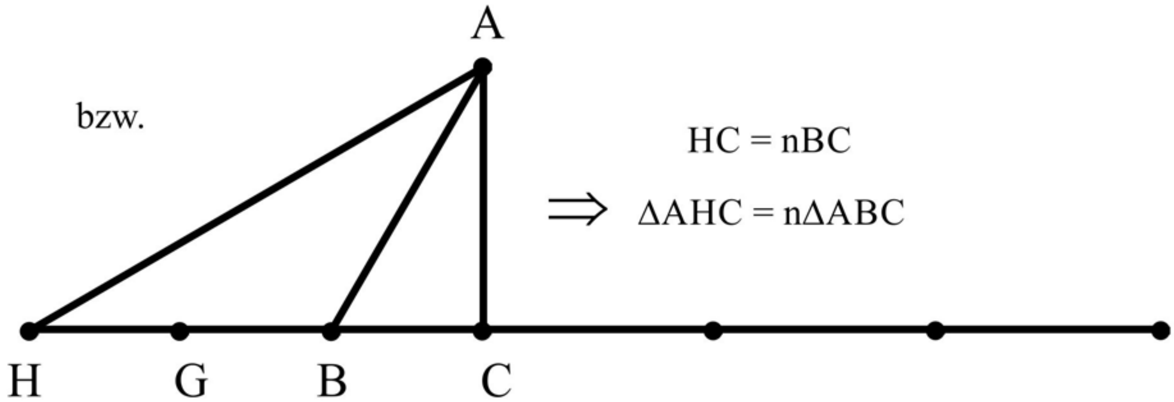
AG , AH ; AK , AL



$CB = BG = \cdots = GH$

$\underset{\text{I. 38}}{\Longrightarrow}$ $\Delta AHG = \Delta AGB = \cdots = \Delta ABC$

bzw.



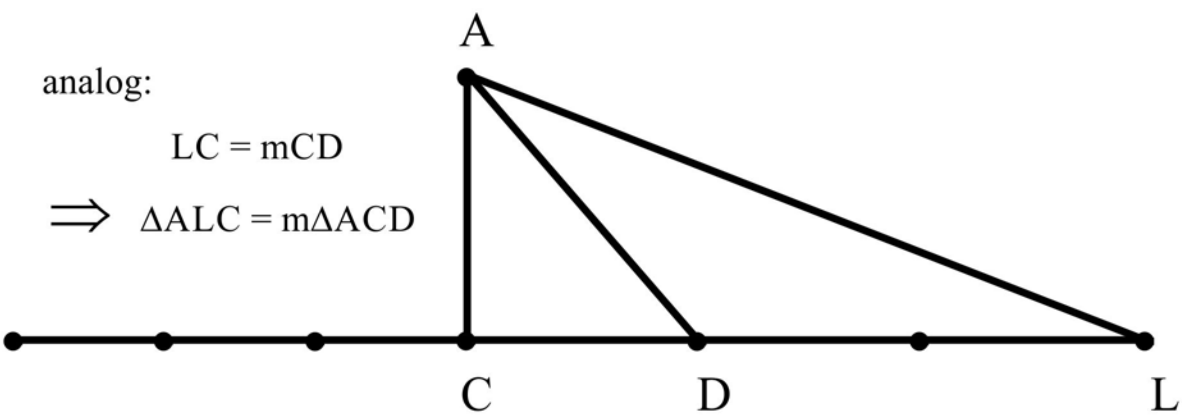
$HC = nBC$

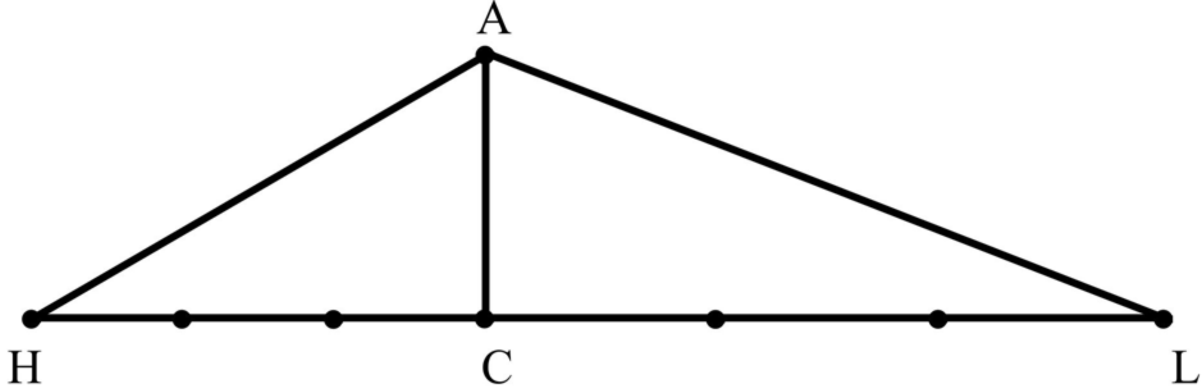
$\Longrightarrow$ $\Delta AHC = n\Delta ABC$

analog:

$LC = mCD$

$\Longrightarrow$ $\Delta ALC = m\Delta ACD$



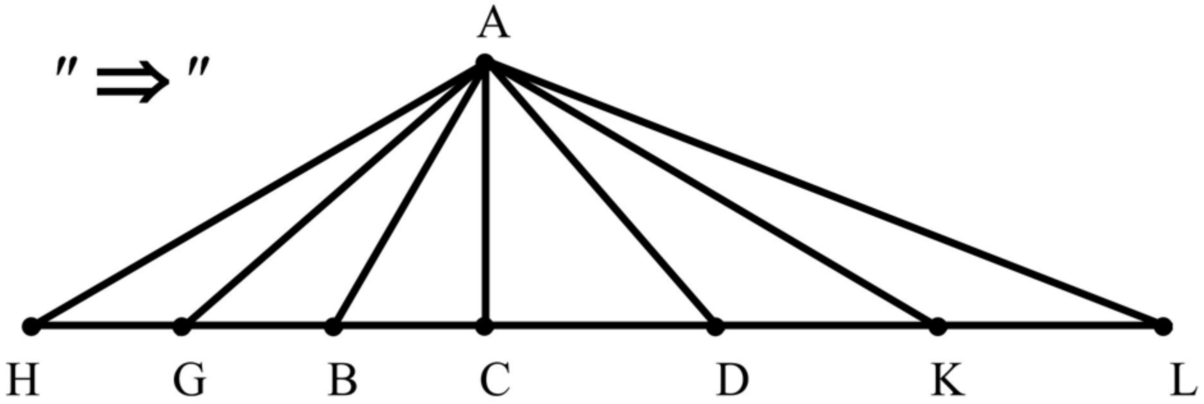


$$HC = CL \underset{\text{I. 38}}{\Longrightarrow} \Delta AHC = \Delta ACL$$

$$HC > CL \underset{?}{\Longrightarrow} \Delta AHC > \Delta ACL$$

$$\cdots < \cdots \underset{?}{\Longrightarrow} \cdots < \cdots$$

$'' \Rightarrow ''$

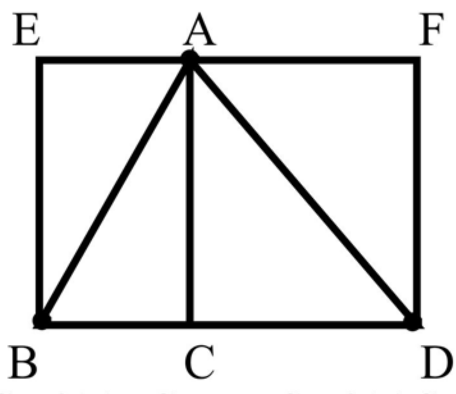


$$nBC > mCD \Longrightarrow n\Delta ABC > m\Delta ACD$$

$$\cdots = \cdots \Longrightarrow \cdots = \cdots$$

$$\cdots < \cdots \Longrightarrow \cdots < \cdots$$

$$\underset{\text{V. Def. 5}}{\Longrightarrow} \mathbf{BC : CD \equiv \Delta ABC : \Delta ACD}$$



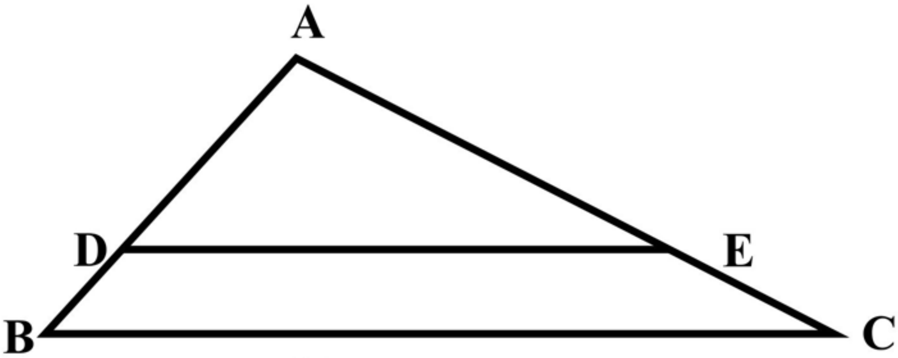
$$\square EC = 2\Delta ABC \ , \quad \square FC = 2\Delta ACD \underset{\text{I. 15}}{\Longrightarrow} \Delta ABC : \Delta ACD \equiv \square EC : \square FC$$

$$\underset{\text{V. 11}}{\Longrightarrow} \mathbf{BC : CD \equiv \square EC : \square FC}$$

q. e. d. □

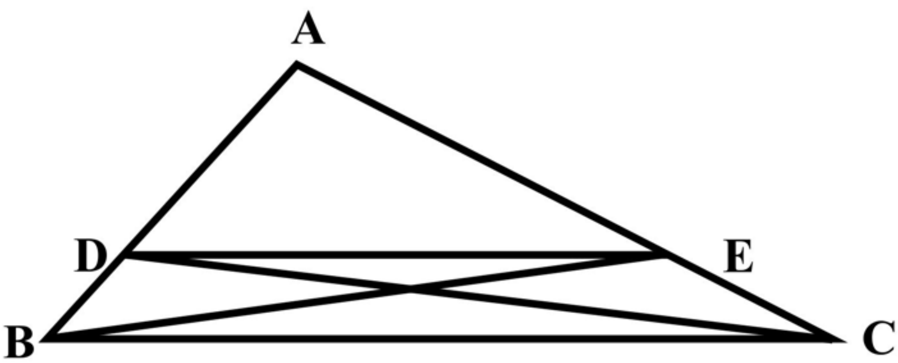
Bemerkung zum altgriechischen Euklid-Text:
Es wird Gleichheit, d. h. $a = b$,
von Identität, d. h. $a \equiv b$ bzw. a ist dasselbe wie b, unterschieden.

Euklid VI. 2



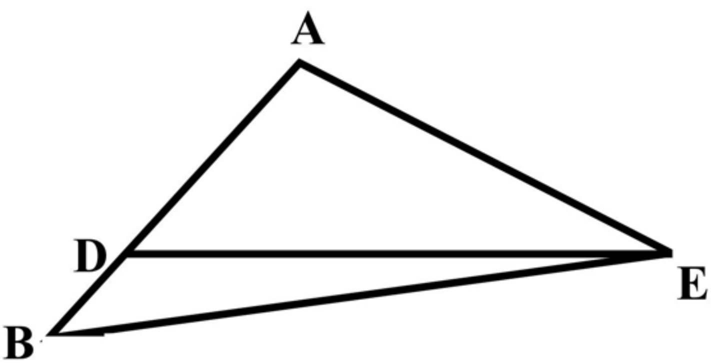
$$DE \parallel BC \quad \overset{\text{Satz}}{\underset{\text{VI. 2}}{\Longleftrightarrow}} \quad BD : DA \equiv CE : EA$$

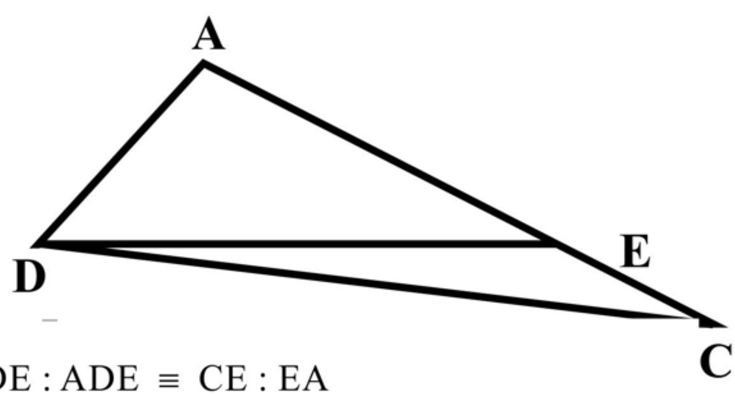
„ Beweis „



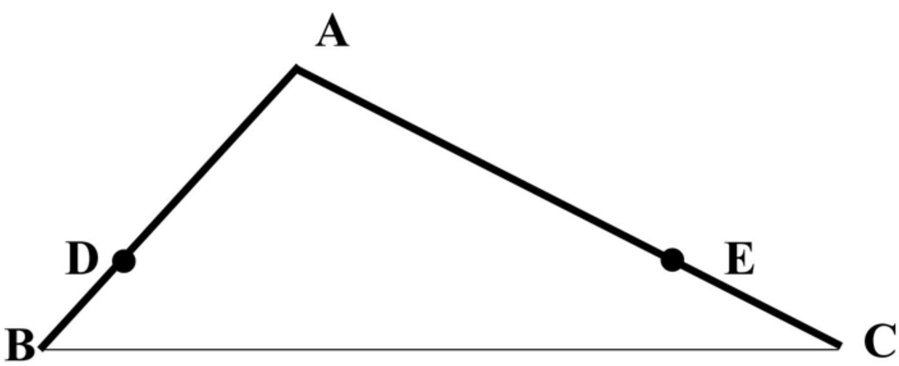
$$DE \parallel BC \quad \underset{\text{I. 37}}{\Longrightarrow} \quad BDE = CDE$$

$$\underset{\text{V. 7}}{\Longrightarrow} \quad BDE : ADE \equiv CDE : ADE$$





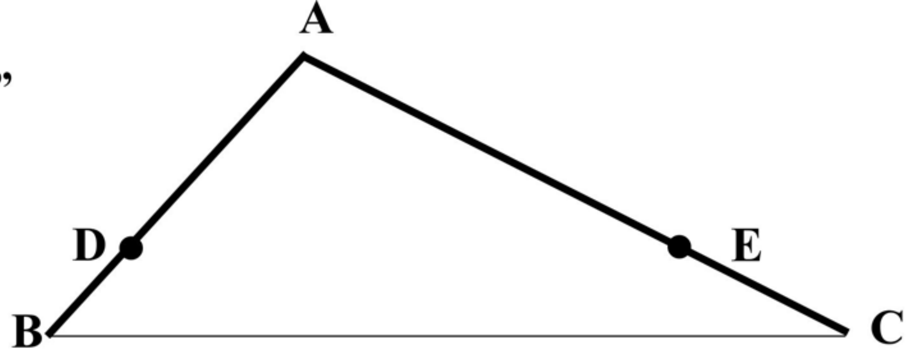
$$\Longrightarrow \quad BD : DA \underset{\text{VI. 1}}{\equiv} BDE : ADE \equiv CDE : ADE \underset{\text{VI. 1}}{\equiv} CE : EA$$



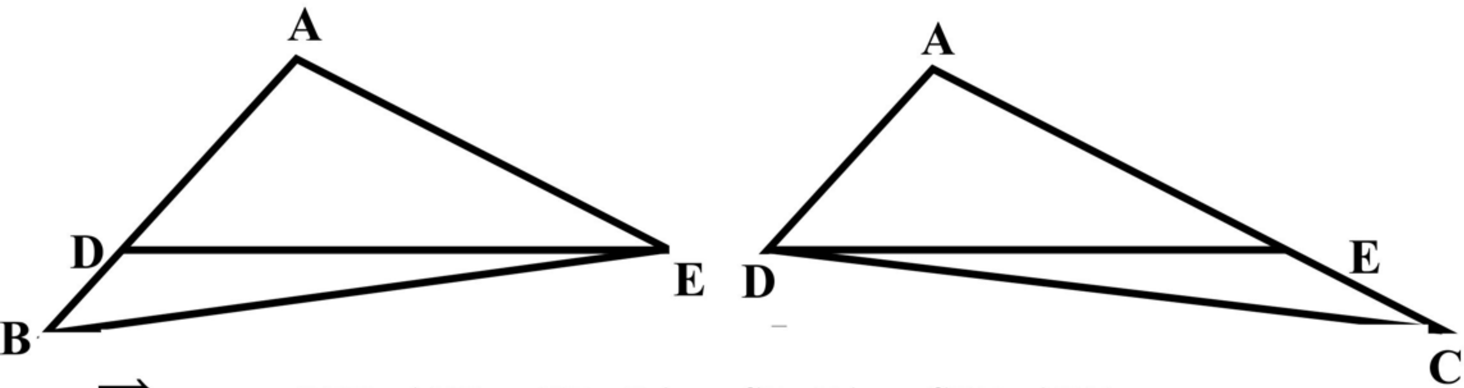
$$\underset{\text{V. 11}}{\Longrightarrow} \quad BD : DA \equiv CE : EA$$

q.e.d. □

„ Beweis „ $\Longleftarrow$

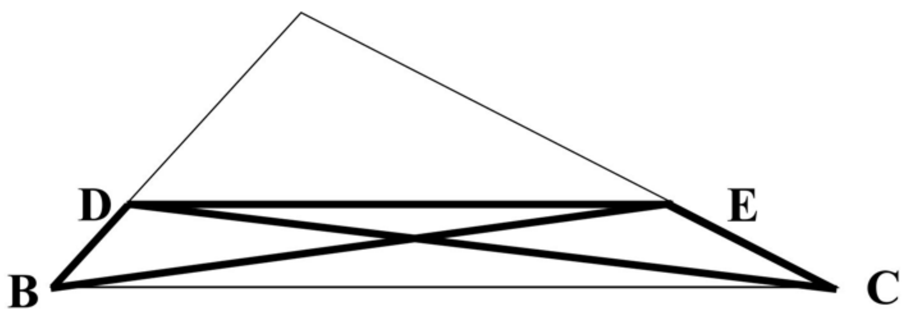


$$BD : DA \equiv CE : EA$$

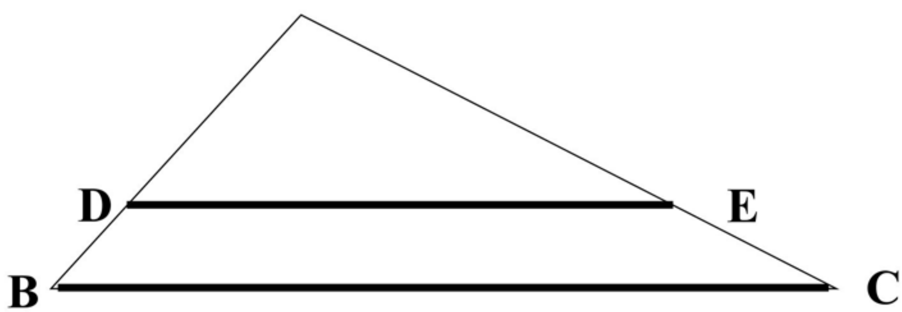


$$\Rightarrow \quad BDE : ADE \underset{VI.\,1}{\equiv} BD : DA \equiv CE : EA \underset{VI.\,1}{\equiv} CDE : ADE$$

$$\underset{V.\,11}{\Rightarrow} \quad BDE : ADE \equiv CDE : ADE$$



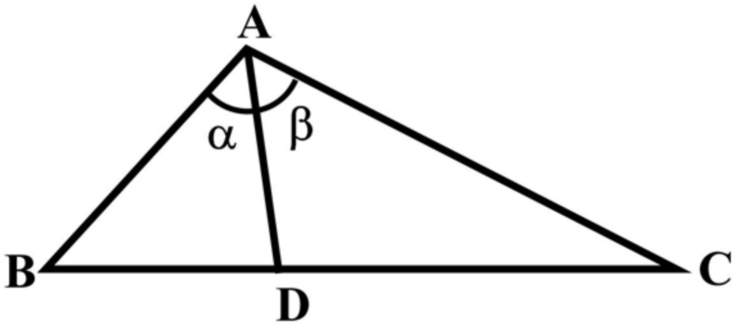
$$\underset{V.\,9}{\Rightarrow} \quad BDE = CDE$$



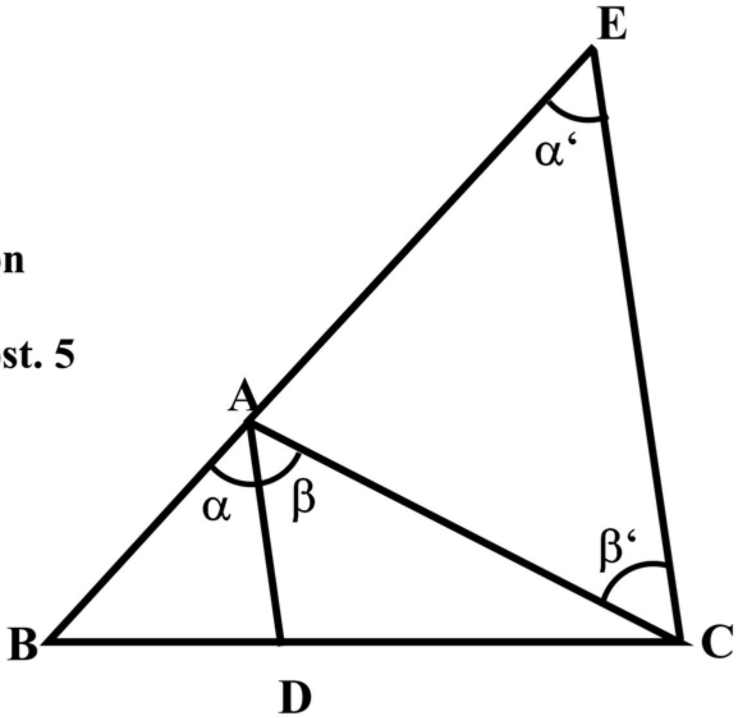
$$\underset{I.\,39}{\Rightarrow} \quad DE \,||\, BC$$

q. e. d. □

Euklid VI. 3



$$\alpha = \beta \quad \underset{\text{VI. 3}}{\overset{\text{Satz}}{\Longleftrightarrow}} \quad \mathbf{BD : DC \equiv BA : AC}$$



„ Beweis „

$\Longrightarrow$

Konstruktion

DA ||CE, Post. 5

$$AD \,||\, EC \underset{\text{I. 29}}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \beta‘ = \beta \\ \alpha = \alpha‘ \end{array} \right\} \underset{\alpha = \beta}{\Longrightarrow} \beta‘ = \alpha‘$$

$$\underset{\text{I. 6}}{\Longrightarrow} AE = AC \underset{\text{VI. 2}}{\Longrightarrow} \mathbf{BD : DC \equiv BA : AC}$$

q. e. d. □

„ Beweis „

$\Longleftarrow$

$$EC \,||\, AD \underset{\text{VI. 2}}{\Longrightarrow} BD : DC \equiv BA : AE$$

$$\Longrightarrow BA : AC \underset{\text{Vor.}}{\equiv} BD : DC \equiv BA : AE$$

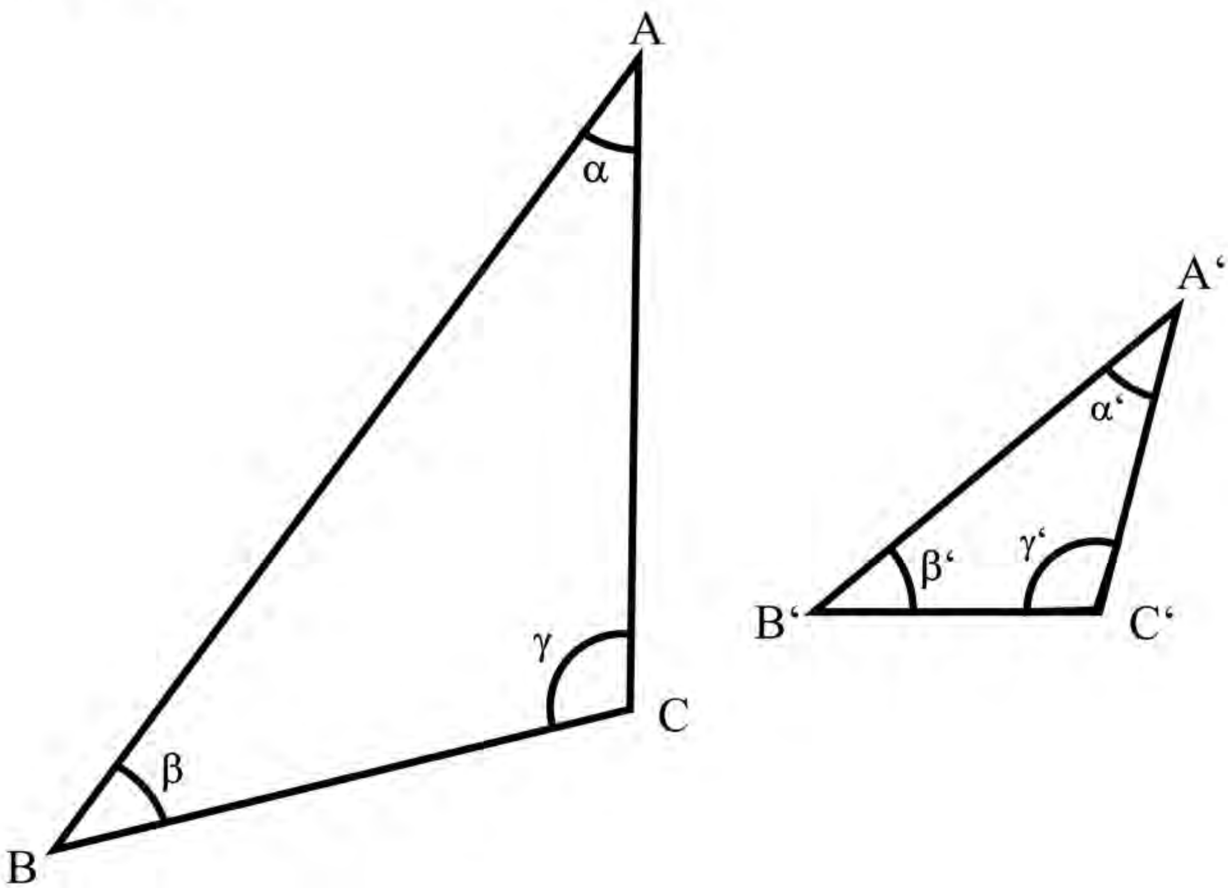
$$\underset{\text{V. 11}}{\Longrightarrow} BA : AC \equiv BA : AE$$

$$\underset{\text{V. 9}}{\Longrightarrow} AC = AE \underset{\text{I. 5}}{\Longrightarrow} \beta‘ = \alpha‘$$

$$\underset{\text{I. 29}}{\Longrightarrow} \beta‘ = \alpha‘, \alpha‘ = \alpha, \beta‘ = \beta \underset{?}{\Rightarrow} \alpha = \beta$$

q. e. d. □

Euklid VI. 4

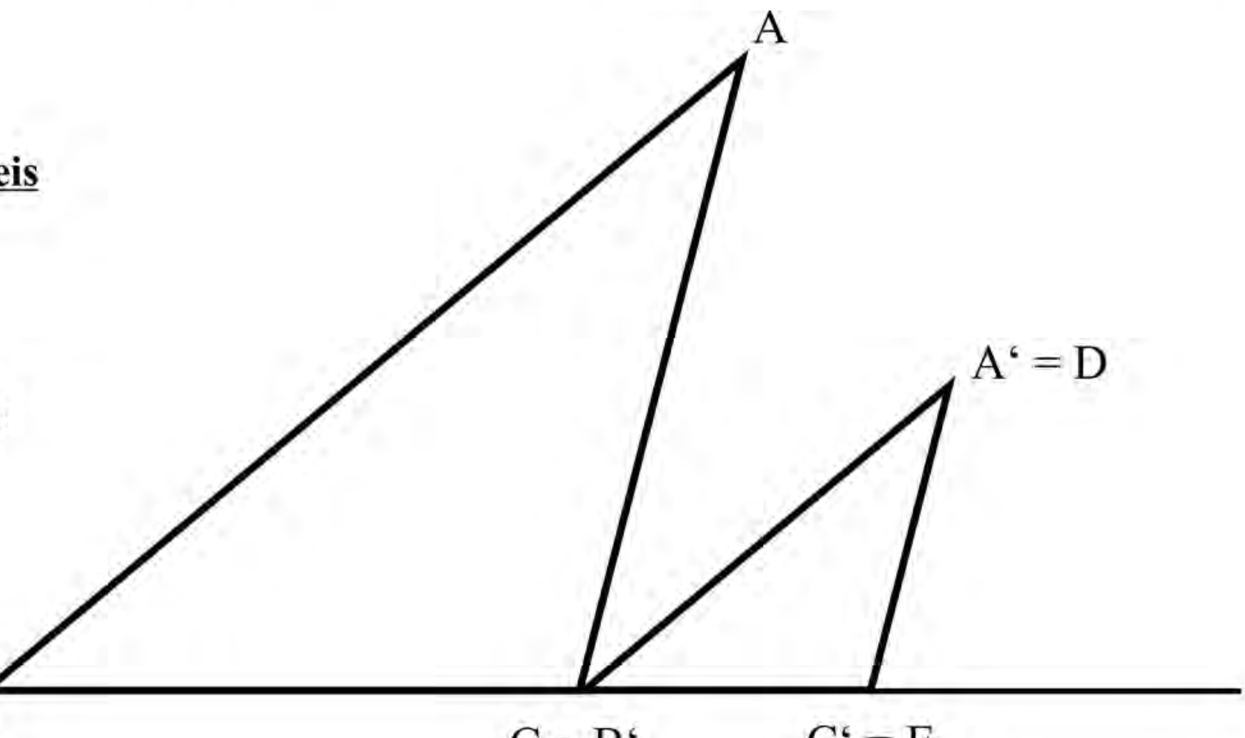


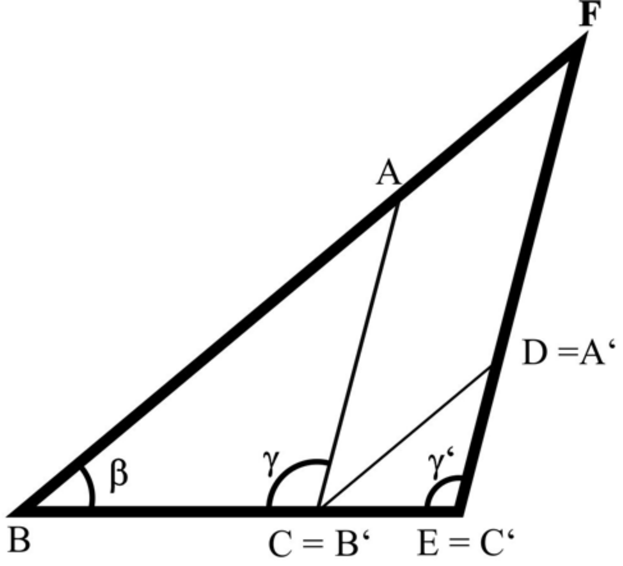
ähnliche Dreiecke

$$\Delta\,\mathbf{ABC} \sim \Delta\,\mathbf{A'B'C'}: \;\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}\; \left\{\begin{array}{c} \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \\ \alpha = \alpha' \end{array}\right\} \;\underset{\text{VI. 4}}{\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow}}\; \left\{\begin{array}{c} AB : BC \equiv A'B' : B'C' \\ BC : CA \equiv B'C' : C'A' \\ BA : AC \equiv B'A' : A'C' \end{array}\right\}$$

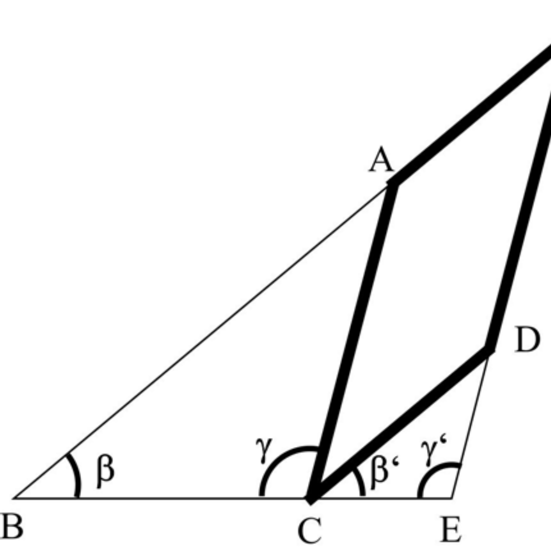
Beweis

$\underset{\text{Post. 2}}{\Longrightarrow}$
$+ \cdots$





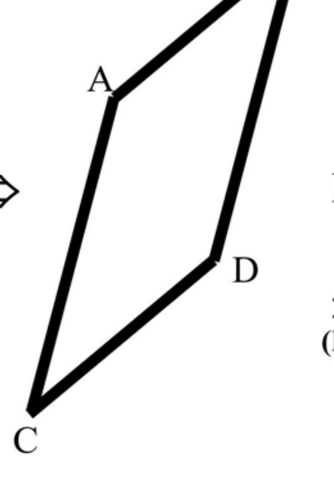
$$\beta + \gamma < 2R \underset{\gamma = \gamma'}{\Longrightarrow} \beta + \gamma' < 2R \underset{\textbf{Post. 5}}{\Longrightarrow} (\text{Gerade } BA) \cap (\text{Gerade } ED \;=\; \{F\}$$



$$\beta = \beta' \underset{\textbf{(I. 28)}}{\Longrightarrow} BF \parallel CD$$

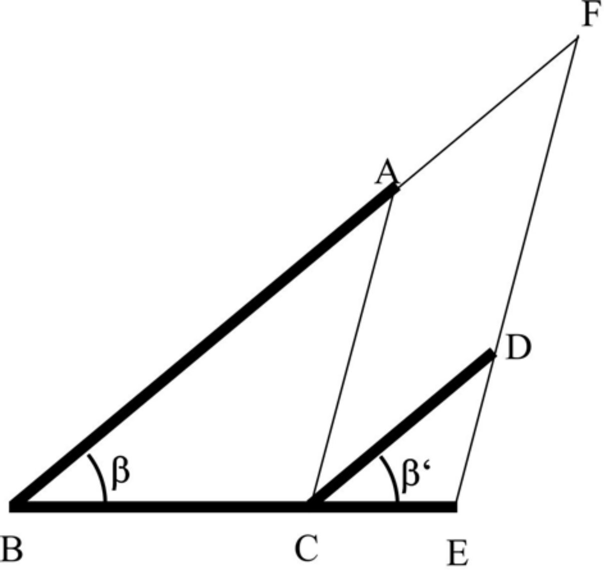
$$\gamma = \gamma' \underset{\textbf{(I. 28)}}{\Longrightarrow} AC \parallel FE$$

$$\Longrightarrow$$



FACD = Parallelogramm

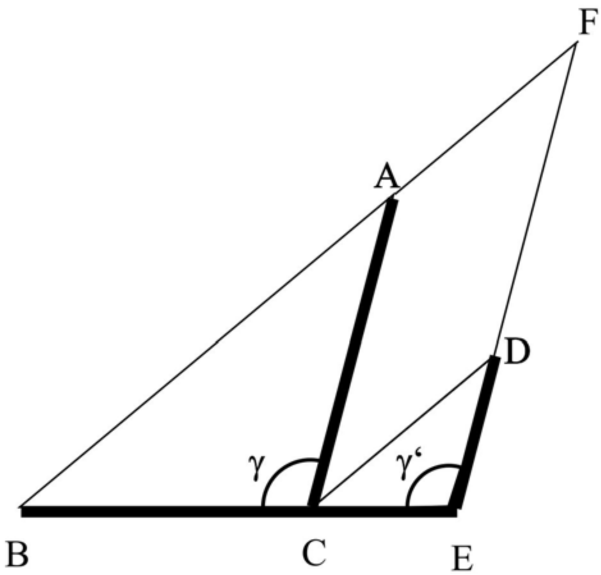
$$\underset{\textbf{(I. 34)}}{\Longrightarrow} FA = DC\,,\;\; AC = FD$$



$$AC \parallel FE \underset{(VI,\,2)}{\Rightarrow} \quad BA : AF \equiv BC : CE$$

$$\underset{(AF = CD)}{\Rightarrow} \quad BA : CD \equiv BC : CE$$

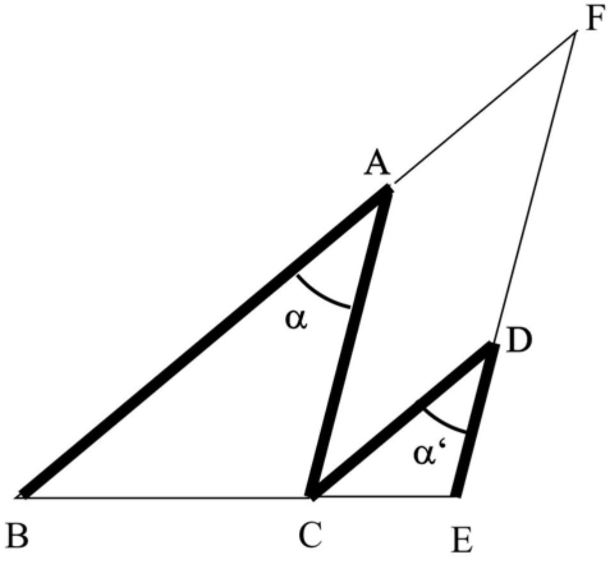
$$\underset{(V,\,16)}{\Rightarrow} \beta) \quad \underline{AB : BC \equiv DC : CE}$$



$$CD \parallel BF \underset{(VI.\,2)}{\Rightarrow} \quad BC : CE \equiv FD : DE$$

$$\underset{(FD = AC)}{\Rightarrow} \quad BC : CE \equiv AC : DE$$

$$\underset{(V.\,16)}{\Rightarrow} \gamma) \quad \underline{BC : CA \equiv CE : ED}$$

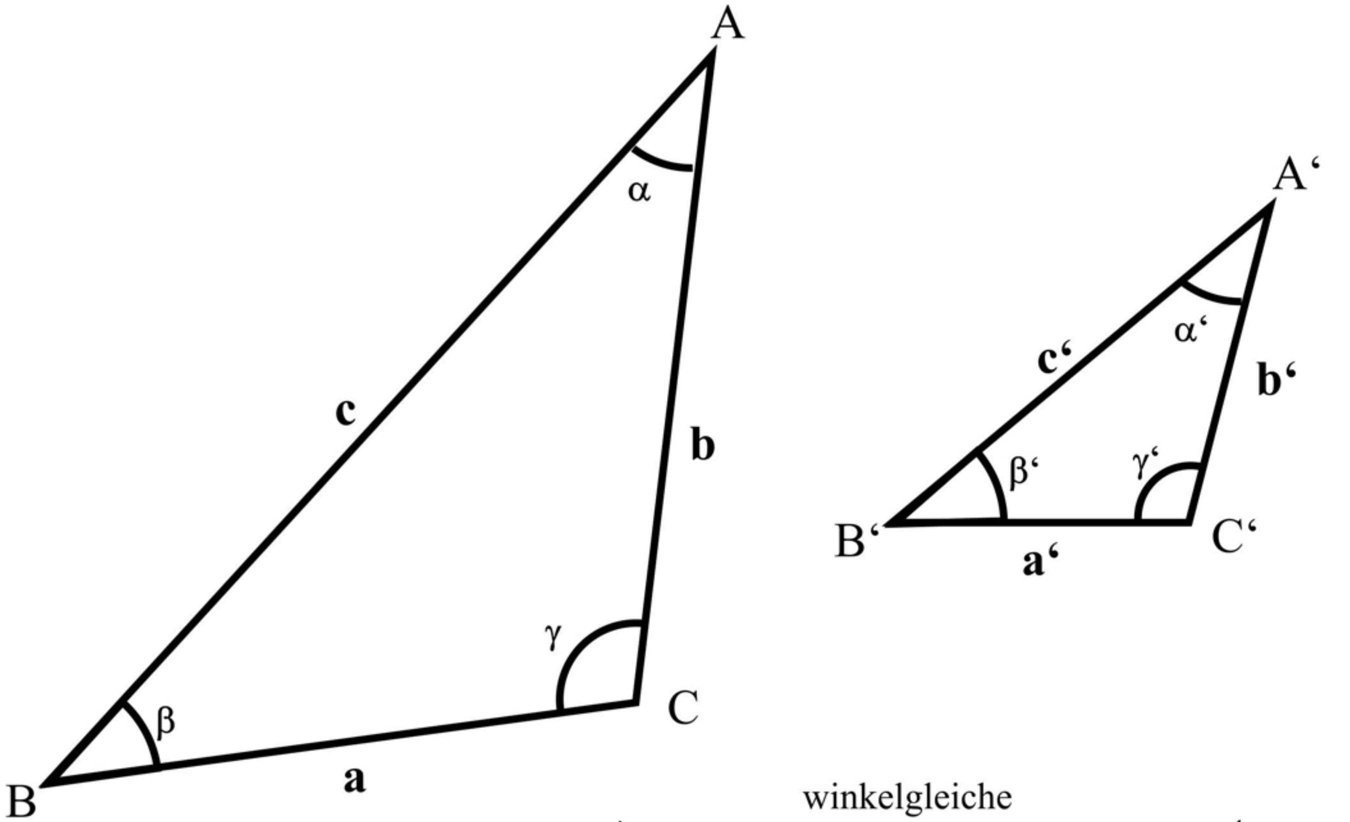


$$\left.\begin{array}{r} AB : BC \equiv DC : CE \\ BC : CA \equiv CE : ED \end{array}\right\}$$

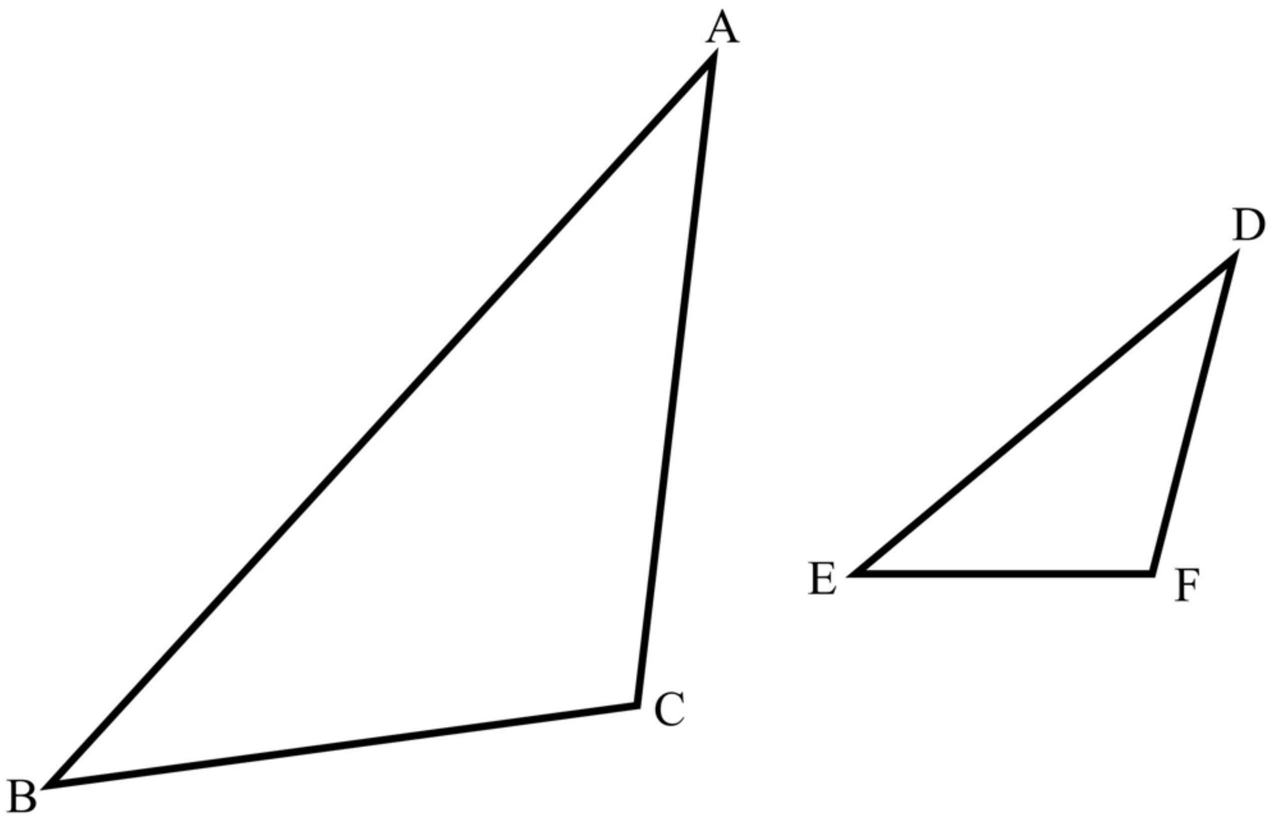
$$\underset{(V.\,22)}{\Rightarrow} \alpha) \quad \underline{BA : AC \equiv CD : DE}$$

q. e. d. □

Euklid VI. 5

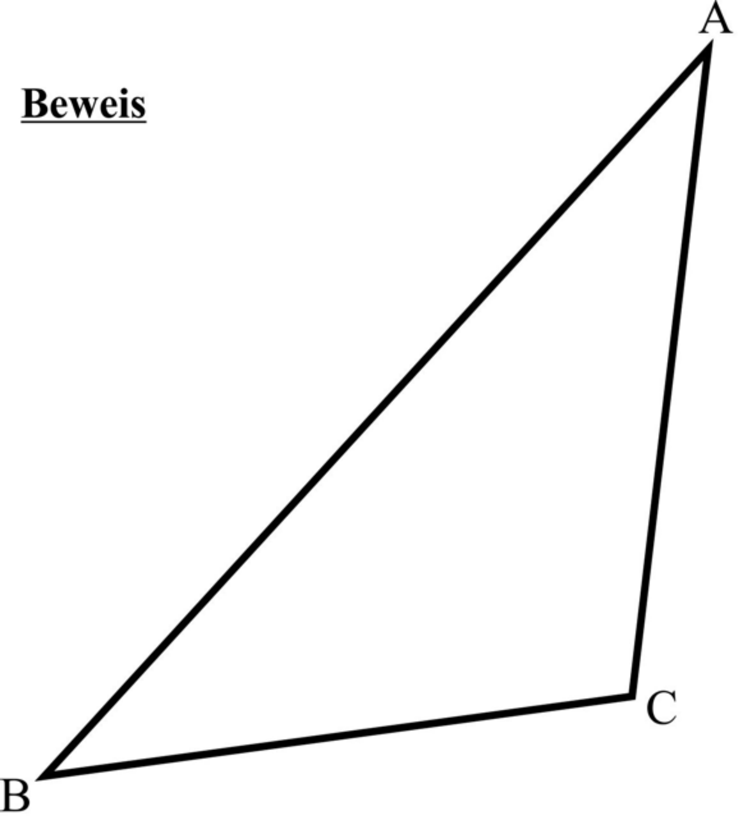


proportionale Seiten zweier Dreiecke $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{b : c \equiv b' : c'} \\ \mathbf{c : a \equiv c' : a'} \\ \mathbf{a : b \equiv a' : b'} \end{array}\right\} \overset{\textbf{Satz}}{\underset{\textbf{VI, 5}}{\Longrightarrow}}$ winkelgleiche Dreiecke $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' :\Leftrightarrow . \left\{\begin{array}{l} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \end{array}\right.$

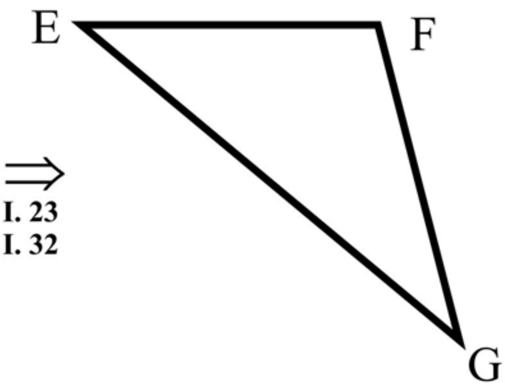


$$\left.\begin{array}{l} AB : BC \equiv DE : EF \\ BC : CA \equiv EF : FD \\ BA : AC \equiv ED : DF \end{array}\right\} \overset{\textbf{Satz}}{\underset{\textbf{VI. 5}}{\Longrightarrow}} \left\{\begin{array}{l} \angle ABC = \angle DEF \\ \angle BCA = \angle EFD \\ \angle CAB = \angle FDE \end{array}\right.$$

Beweis



$\xRightarrow[\text{I. 23, I. 32}]{}$



Konstruktion
I. 23

$$\left\{\begin{array}{l}\angle FEG = \angle ABC \\ \angle EFG = \angle ACB\end{array}\right.$$

$$\xRightarrow[\text{I. 32}]{} \quad \angle \bullet A \bullet = \angle \bullet G \bullet$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta\, ABC \ \underset{\text{ähnlich}}{\overset{\text{winkelgleich}}{\sim}} \ \Delta\, EGF$$

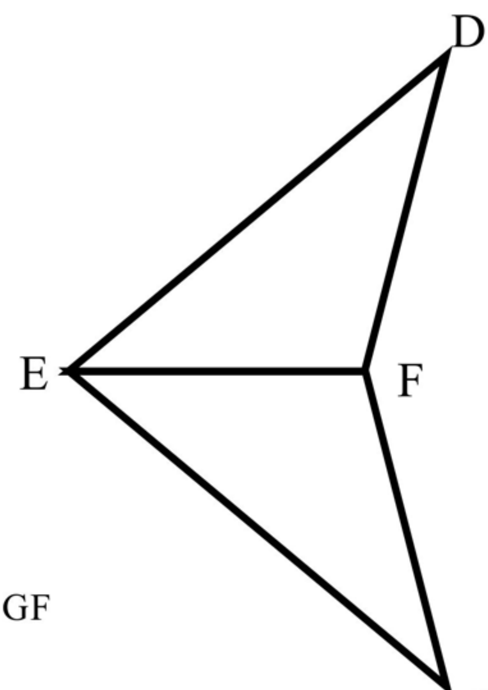
$$\xRightarrow[\text{VI. 4}]{} \quad \begin{array}{l} AB : BC \equiv GE : EF \\ BC : CA \equiv EF : FG \end{array}$$

$$\xRightarrow[\text{Vorauss. V. 11}]{} \quad \begin{array}{l} DE : EF \equiv GE : EF \\ EF : FD \equiv EF : FG \end{array}$$

$$\xRightarrow[\text{V. 9}]{} \quad \begin{array}{l} DE = GE \\ DF = GF \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad (DE\ , EF) = (GE\ , EF)\ , \ DF = GF$$

$$\xRightarrow[\text{I. 8}]{} \quad \angle\, DEF = \angle\, GEF$$



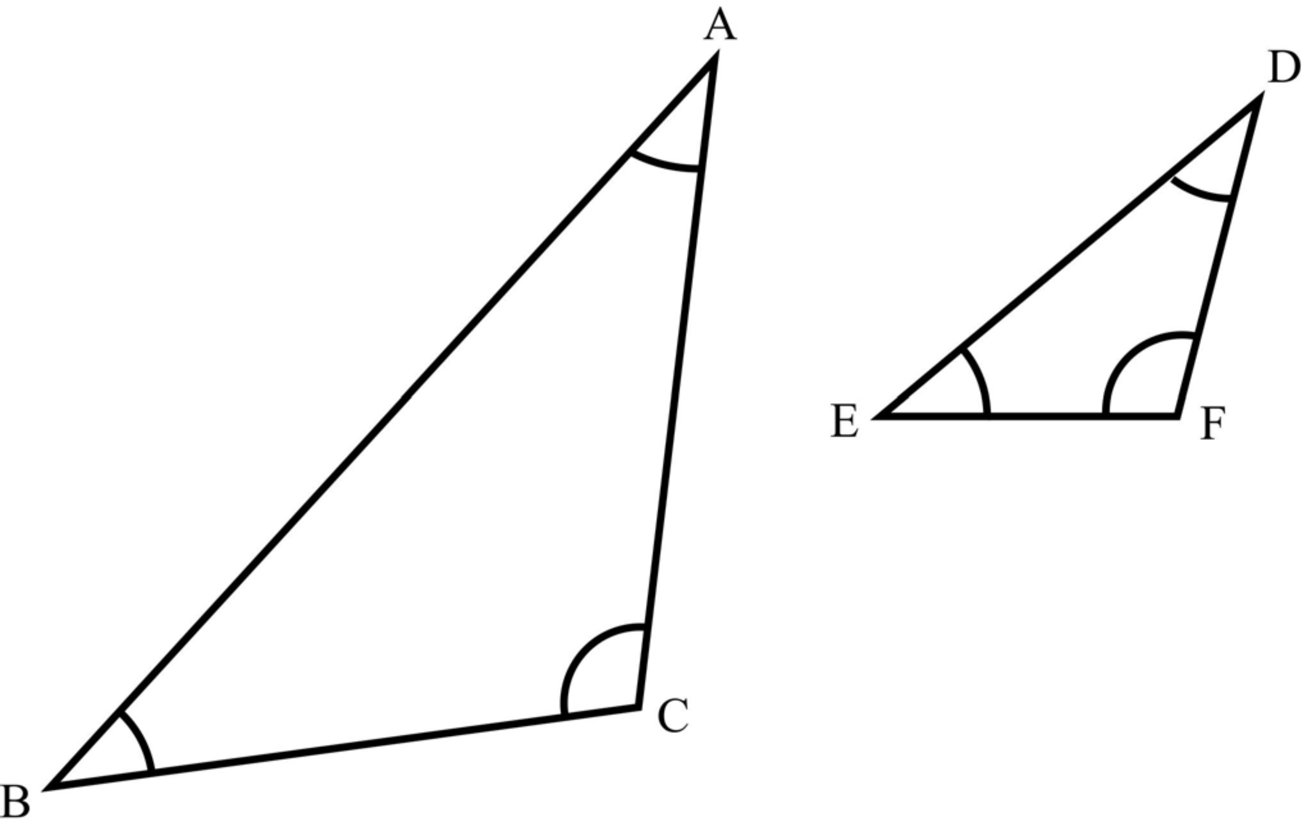
$$\Longrightarrow \quad (DE\,,\,EF) = (GE\,,\,EF)\,, \quad \angle DEF = \angle GEF$$

$$\underset{\text{I. 4}}{\Longrightarrow} \quad \angle DEF = \angle GEF \quad , \quad \angle DFE = \angle GFE$$

$$\underset{\text{Konstr.}}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{llll} \angle FED = \angle GEF & , \quad \angle GEF = \angle ABC & \Longrightarrow & \angle \mathbf{ABC} = \angle \mathbf{DEF} \\ \angle EFD = \angle GFE & , \quad \angle GFE = \angle ACB & \Longrightarrow & \angle \mathbf{ACB} = \angle \mathbf{DFE} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \qquad \angle \bullet \mathbf{A} \bullet = \angle \bullet \mathbf{D} \bullet$$

q. e. d. □

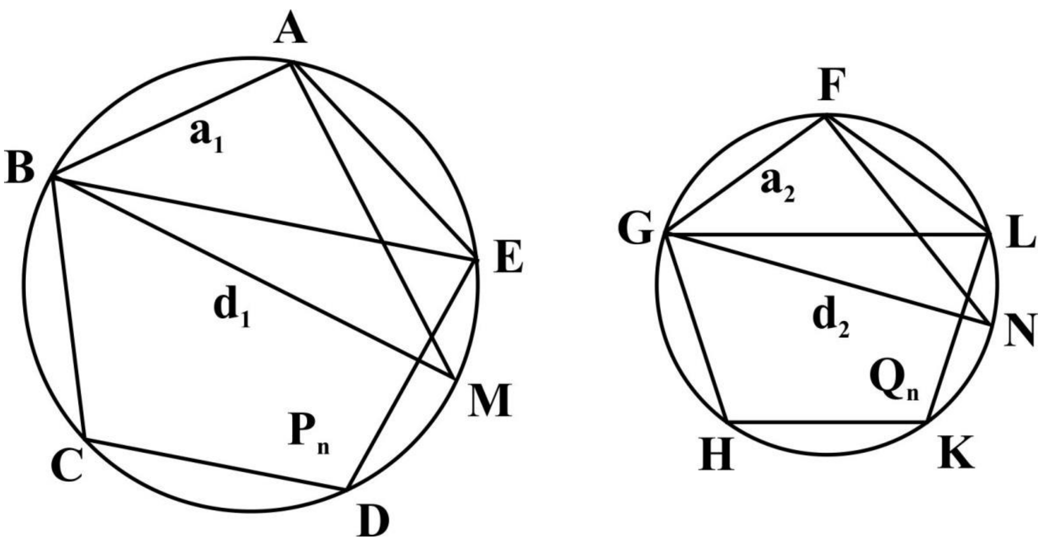


Euklid VI. 4, 5

$$\left.\begin{array}{l} \angle ABC = \angle DEF \\ \angle BCA = \angle EFD \\ \angle CAB = \angle FDE \end{array}\right\} \underset{\text{VI. 5}}{\overset{\text{VI. 4}}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{array}{l} AB : BC \equiv DE : EF \\ BC : CA \equiv EF : FD \\ BA : AC \equiv ED : DF \end{array}\right.$$

Euklid XII, 1

$$\boxed{P_n \sim Q_n \;\Rightarrow\; P_n : Q_n \equiv d_1^2 : d_2^2}$$



Beweis

$$P_n \sim Q_n \underset{\substack{\text{VI,def.}\\ \text{VI,6}}}{\Rightarrow} \Delta ABE \sim \Delta FGL \;;$$

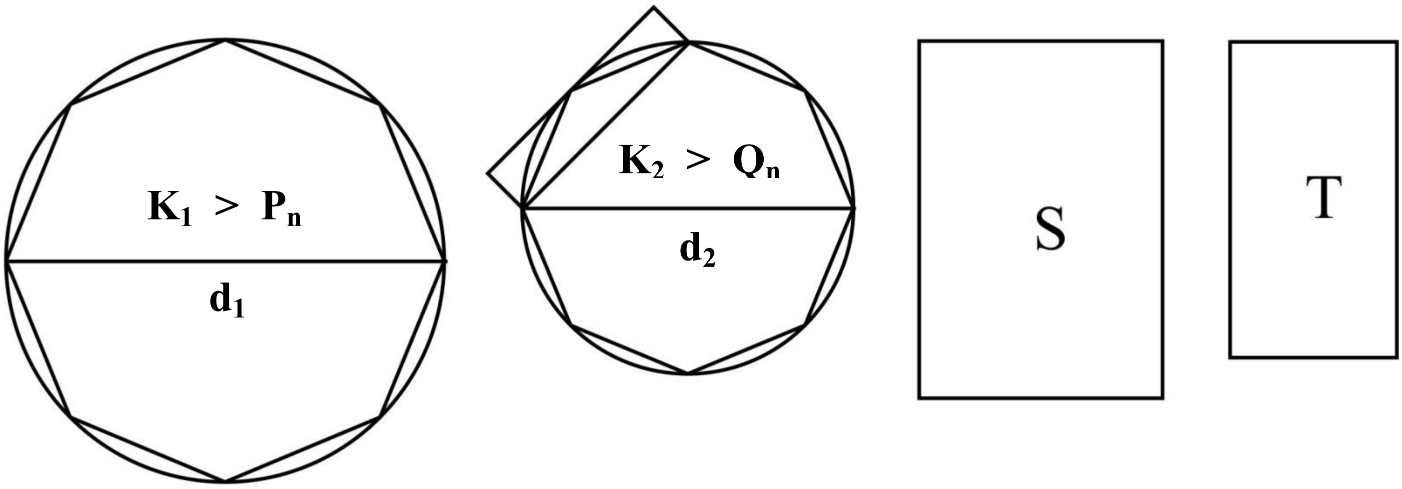
$$\underset{\text{III,27}}{\Rightarrow} \sphericalangle AMB = \sphericalangle FNG \;;$$

$$\underset{\substack{\text{III,31}\\ \text{VI,4}}}{\Rightarrow} \Delta BAM \sim \Delta GFN \;;$$

$$\Rightarrow \quad d_1^2 : d_2^2 \equiv a_1^2 : a_2^2 \underset{\text{VI,20}}{\equiv} P_n : Q_n$$

Euklid XII, 2

$\boxed{K_1 : K_2 \equiv d_1^2 : d_2^2}$



Beweis $\quad d_1^2 : d_2^2 \equiv K_1 : S \Rightarrow S = K_2 \quad ; \quad$ ① $\quad S < K_2 \Rightarrow \lightning$

② $\quad S > K_2 \Rightarrow \lightning$

ad ① $\quad$ Konstruktion regulärer (⇒ ähnlicher) Polygone

$$
\begin{array}{llll}
\underset{X,1}{\Rightarrow} & K_2 - S > K_2 - Q_n > 0^* \; ; & \underset{XII,1}{(\Rightarrow)} & P_n : Q_n \equiv d_1^2 : d_2^2 \; ; \\
\Rightarrow & S < Q_n \; , & & P_n : Q_n \equiv K_1 : S \; ; \\
\Rightarrow & S < Q_n \; , & & P_n : K_1 \equiv Q_n : S \; ; \\
\Rightarrow & S < Q_n \; , & & Q_n < S \quad \lightning
\end{array}
$$

ad ②

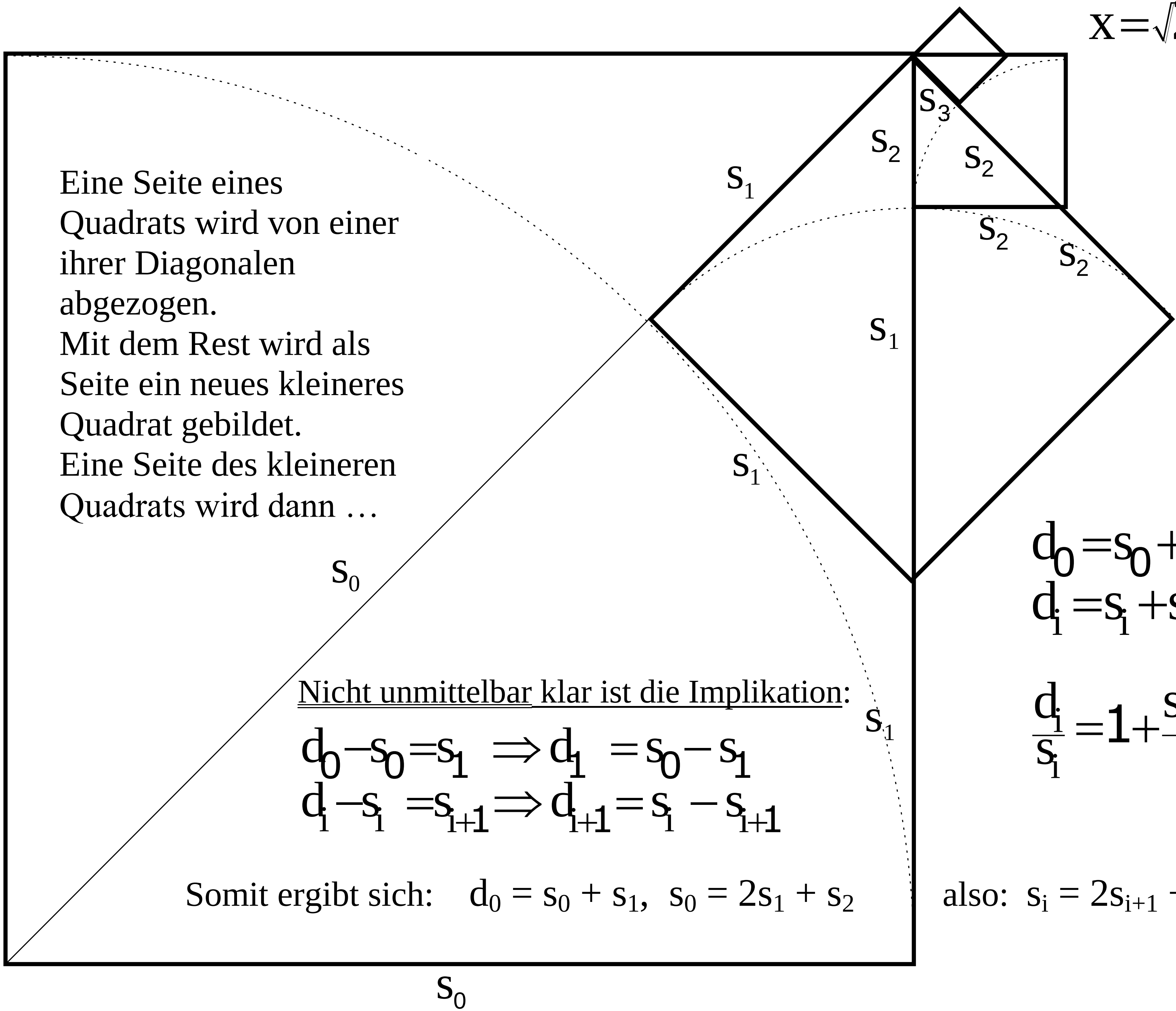
$$
\begin{array}{lll}
 & d_1^2 : d_2^2 \equiv K_1 : S \; , & S > K_2 \; ; \\
\Rightarrow & d_1^2 : d_2^2 \equiv T : K_2 \; , & T < K_1 \; ; \\
\Rightarrow & d_2^2 : d_1^2 \equiv K_2 : T \; , & T < K_1 \; ; \quad \underset{①}{\Rightarrow} \quad \lightning \\
 & (d_1^2 : d_2^2 \equiv K_1 : S \; , & S < K_2)
\end{array}
$$

* ausführliche algebraische Beschreibung der "Exhaustion" (nächste Seite) ist noch zu erstellen

Euklidischer Algorithmus, Wechselwegnahme, Kettenbruch

$$x=\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1+\frac{1}{1+x}$$

$$\Leftrightarrow x = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+x}}$$



Eine Seite eines Quadrats wird von einer ihrer Diagonalen abgezogen.
Mit dem Rest wird als Seite ein neues kleineres Quadrat gebildet.
Eine Seite des kleineren Quadrats wird dann …

$$d_0 = s_0 + s_1 \; ; \; d_1 = s_0 - s_1$$

$$d_i = s_i + s_{i+1} \; ; \; d_{i+1} = s_i - s_{i+1}$$

$$\frac{d_i}{s_i} = 1 + \frac{s_{i+1}}{s_i} = \frac{1}{1+\frac{d_{i+1}}{s_{i+1}}}$$

<u>Nicht unmittelbar</u> klar ist die Implikation:

$$d_0 - s_0 = s_1 \Rightarrow d_1 = s_0 - s_1$$

$$d_i - s_i = s_{i+1} \Rightarrow d_{i+1} = s_i - s_{i+1}$$

Somit ergibt sich: $d_0 = s_0 + s_1$, $s_0 = 2s_1 + s_2$ also: $s_i = 2s_{i+1} + s_{i+2}$

„Exhaustion“ des Kreises mittles einer Folge regulärer Polygone durch fortlaufende Halbierung der Kreisbögen