Zum Begriffspaar arithmetisches, harmonisches Mittel

Seite 7 und Seite 8 sind nebeneinander zu betrachten.

Otto und Gabriele Hamborg, Berlin 1995 u. 2021

I.
Fragwürdige Übersetzungen!

Definition des harmonischen und arithmetischen Mittels in Platons Timaios 36a1.

... δύο εἶναι μεσότητας,
τὴν μὲν ταὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην,
τὴν δὲ ἴσῳ μὲν κατ᾽ ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, .ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην.

(Calcidius, 0 < 4. Jhdt.)
Medietatum porro
altera quota parte limitis extimi praecellebat unum extimum limitem,
tota praecellebatur ab alio extimo limite,
altera pari summa et aequali ad numerum modo praecellebat et praecellebatur ab extimis.

(**Franz Susemihl** in: *Platon's Werke, vierte Gruppe, sechstes und siebentes Bändchen,* Stuttgart 1856)
... zwei Mittelglieder ..., von denen das erste zum einen der äußeren Glieder im gleichen Verhältnis stand, in dem das zweite zum anderen der äußeren Glieder stand, das größer war.

(**Rudolf Rufener** in: *Platon Spätdialoge*. Bd. II, S. 215. Zürich 1969)
... zwei Arten von Mittelwerten ...: der eine von ihnen übertraf die eine der beiden äußeren Zahlen und wurde von der anderen übertroffen, und zwar beide Male um den selben Bruchteil, während der andere sie um dieselbe Zahl übertraf, beziehungsweise übertroffen wurde.

(**Friedrich Schleiermacher** et al.in: *Platon Sämtliche Werke*. Bd. VIII, S. 253. Frankfurt am Main und Leipzig 1991)
... zwei Mittelglieder ...,von denen das eine um den gleichen Bruchteil der äußeren Glieder das eine der letzteren übertraf und von den anderen übertroffen wurde, das andere aber um eine gleiche Zahl.

(**Jens Atzpodien** in: *Philosophischer Mythos und mathematische Metaphorik in Platons Timaios.* Diss. S. 39. Bonn 1985)
..."das eine um den gleichen Bruchteil der Außenglieder diese übertrifft und von ihnen übertroffen wird, das andere dagegen von beiden um den gleichen arithmetischen Betrag differiert"...

(**Hans Günter Zekl** in: *Platon Timaios.* S. 43. Hamburg 1992)
... zwei Mittelgrößen ..., die eine davon ist um das gleiche Verhältnis größer als der Eckwert, wie sie kleiner ist als der andere, die andere übertrifft ganzzahlig den einen Eckwert um so viel, wie sie hinter dem anderen zurückbleibt.

(**Apelt**, **Otto** in: *Platon: Sämtliche Dialoge.* S. 53. Hamburg 1993)
... zwei Mittelglieder ..., von denen das erste das eine der äußeren Glieder in dem nämlichen Verhältnis überragte, in welchem es hinter dem anderen zurückblieb,
nämlich um den gleichen Bruchteil jedes der beiden äußeren Glieder,
das zweite um die gleiche Zahl das eine Glied überragte und hinter dem anderen zurückblieb.

(**Apelt**, **Otto,** a. a. O., S. 155)
Anmerkung(en):
...; die harmonische Proportion ist diejenige, deren mittleres Glied das erste Glied um einen so großen Teil von diesem übertrifft, als es selbst hinter dem dritten Glied zurückbleibt; ...

Definition nach Platons „Timaios“, 36a1 (4. Jhdt. < 0).

… δύο εἶναι μεσότητας,
τὴν μὲν ταὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην,
τὴν δὲ ἴσῳ μὲν κατ᾽ ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, .ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην.

… es sind zwei Medietäten, $\boxed{a < M < b}$

die eine, die mit dem demselben Teil der Grenzen selbst überragt und überragt wird,

$$\mathbf{M = H \;:\; H = a + \frac{1}{p}a \quad \text{und} \quad b = H + \frac{1}{p}b \quad \text{für ein } p \in \mathbb{N}}$$

die andere, die mit Gleichem zahlmäßig einerseits überragt, mit Gleichem andererseits überragt wird.

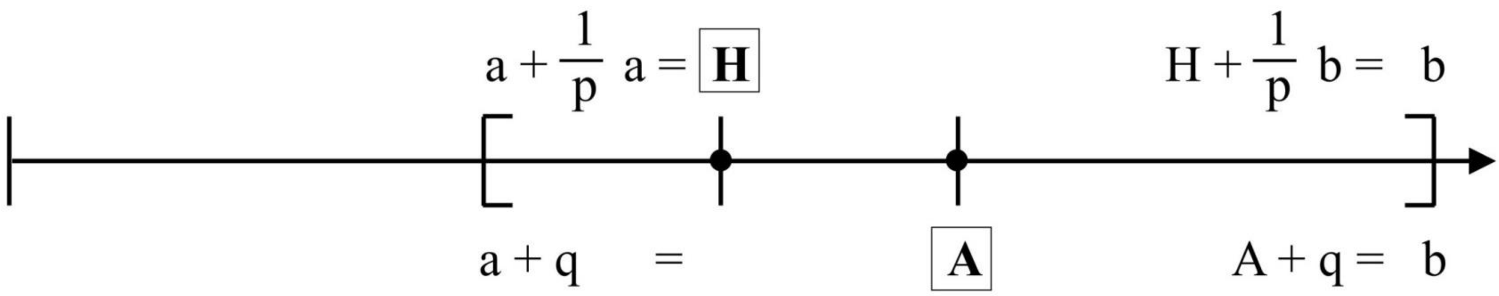
$$\mathbf{M = A \;:\; A = a + n \quad \text{und} \quad b = A + n \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}}$$

Bemerkung: Keine der zuvor zitierten Übersetzungen beachtet in angemessener
Weise Platons Verwendung von αὐτός und ἴσος.

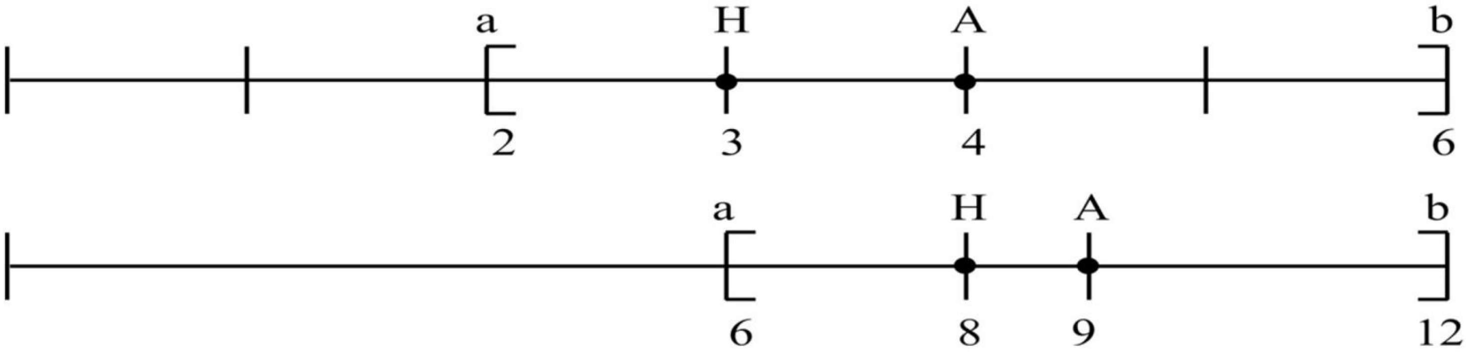
αὐτός	**idem**	**derselbe**	$\equiv$
ἴσος, ἴσος	**aequalis, aequalis**	**der gleiche, das gleiche**	$=$, $=$

Bei einer Betrachtung der Philosophie und Geschichte der Mathematik ist ein **wesentlicher** Gesichtspunkt die **Unterscheidung** von **Verhältnisidentitäten** (z. B. $12 : 8 \equiv 3 : 2$) und **Zahlengleichheiten** (z. B. $12 - 9 = 9 - 6$).

Lineares Modell zur algebraischen Übersetzung von Platons Definition der harmonischen und arithmetischen Medietät [Mitte(l)]



Zwei Beispiele:



$\boxed{H = H(a,b)}$ <u>harmonisches Mittel (in den Grenzen) von a und b</u>

$$\left.\begin{array}{l} a+\frac{1}{p}a=H \\ H+\frac{1}{p}b=b \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{p}a=H-a \\ \frac{1}{p}b=b-H \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\frac{a}{b}\equiv\frac{H-a}{b-H}\right\} \Leftrightarrow \left\{(a+b)H=2ab\right\} \Leftrightarrow \left\{\frac{1}{a}-\frac{1}{H}=\frac{1}{H}-\frac{1}{b}\right\} \Leftrightarrow \left\{H=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{p}\right)}\right\}$$

$\boxed{A = A(a,b)}$ <u>arithmetisches Mittel (in den Grenzen) von a und b</u>

$$\left.\begin{array}{l} a+q=A \\ A+q=b \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} q=A-a \\ q=b-A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\frac{1}{1}\equiv\frac{A-a}{b-A}\right\} \Leftrightarrow \left\{a+b=2A\right\} \Leftrightarrow \left\{a-A=b-A\right\} \Leftrightarrow \left\{A=\frac{1}{2}(a+b)\right\}$$

$\boxed{H(2,6)} = 3$

$$\left.\begin{array}{l} 2+\frac{1}{2}2=3 \\ 3+\frac{1}{2}6=6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}2=3-2 \\ \frac{1}{2}6=6-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\frac{2}{6}\equiv\frac{3-2}{6-3}\right\} \Leftrightarrow \left\{(2+6)3=2\cdot(2\cdot 6)\right\} \Leftrightarrow \left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right\} \Leftrightarrow \left\{3=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)}\right\}$$

$\boxed{H(6,12)} = 8$

$$\left.\begin{array}{l} 6+\frac{1}{3}6=8 \\ 8+\frac{1}{3}12=12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \cdots$$

Die meisten der oben angegebenen Gleichheiten (Aequalitäten) von Zahlen (Quantitäten) (a = b) und Identitäten (Selbigkeiten) von Zahlenverhältnissen (Proportionen) (a:b ≡ c:d) sind in der Schrift „*de institutuione arithmetica*“ des Boethius (* um 480/485; † um 524/526) zu finden.

$\boxed{A(2,6)} = 4$

$$\left.\begin{array}{l} 2+2=4 \\ 4+2=6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \cdots$$

$\boxed{A(6,12)} = 9$

$$\left.\begin{array}{l} 6+3=9 \\ 9+3=12 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \cdots$$

II. Ein textarithmetisches, zahlenpoetisches Glasperlenspiel

des Emi- bzw. Immigranten Suremun Somhtira aus Kastalien, Ortsteil Wärtsrück.

... zwei Arten von Mittelwerten (Medietäten):

der eine mit demselben Teil ihrer Grenzen überragend und überragt,

| τὴν μὲν [ταὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν | ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην,]

2 9 12

2 + 5 + 3 = 10 Wörter

2 + 9 + 12 = 23 Silben

der andere mit Gleichem einerseits zahlmäßig überragend, mit Gleichem andererseits überragt

| τὴν δὲ [ἴσῳ μὲν κατ᾽ ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, | ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην.]

2 12 9

2 + 5 + 3 = 10 Wörter

2 + 12 + 9 = 23 Silben

altera quota parte limitis extimi praecellebat unum extimum limitem, tota praecellebatur ab alio extimo limite, 9 + 6 = 1 + 8 + 6
altera pari summa et aequali ad numerum modo praecellebat et praecellebatur ab extimis. 9 + 4 = 1 + 8 + 4
Wörter

Bem.: Entsprechend der Verschiebung eines Kommas (,) von der zweiten (griech.) Zeile in die erste (lat.) Zeile hat Calcidius Platons Satzbau vertauscht.

... δύο εἶναι μεσότητας,
τὴν μὲν ταὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην,

10

τὴν δὲ ἴσῳ μὲν κατ᾽ ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, .ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην.

7 3 10

1 + 2 + 3 + 4 = 10

Tetraktys: 1, 2, 3, 4

Medietatum porro
altera quota parte limitis extimi praecellebat unum extimum limitem, tota praecellebatur ab alio extimo limite,

1 14
1 8 6 15

altera pari summa et aequali ad numerum modo praecellebat et praecellebatur ab extimis.

4 7 2
1 12 13

Tetraktys: 6, 8, 9, 12

vollkommene Zahlen: 6 = 1 + 2 + 3 ; 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14

III

ANICII MANLII TORQUATI SEVERINI

BOETII

DE INSTITUTIONE ARITHMETICA

LIBRI DUO

CAPITUUM 47
De armonica medietate eiusque proprietatibus
Seite 153, 14 – 154, 19

G. Friedlein. Verlag Teubner, Leipzig. 1867.
Mit formalsprachlicher Übersetzung von O. Hamborg. 2021.

Achtung! Mehrdeutigkeit von *medietas*: Proportion, Hälfte, Medietät;
ebenso *proportio*: Proportion, Proportionalität, Medietät.

Namque in arithmetica proportione medius terminus eadem sua parte et minorem praecedit et a maiore praeceditur, sed alia parte minoris, alia vero parte maioris. Sit enim arithmetica dispositio II. III. IIII. Ternarius igitur numerus binarium tertia sua parte praecedit, id est uno, et a quaternario tertia sua parte praeceditur, id est uno. At vero ternarius non eadem parte minoris minorem vincit vel maioris a maiore superatur.
Namque minorem, id est binarium, uno superat, id est ipsius medietate binarii, a quaternario vero uno relinquitur, quae pars quaternarii quarta est.
Recte igitur dictum est, medium terminum in huiusmodi medietate eadem sui parte et minorem vincere el a maiore superari, sed non eisdem partibus vel minoris minorem transgredi vel maioris a maiore transcendi.

Contrarie armonica medietas proportiones habet.

Namque non eadem parte sua medius terminus in hac proportione vel minorem vincit vel a maiore superatur, sed eadem parte minoris minorem superat, qua parte maioris a maiore superatur.
In hac enim dispositione armonica, quae est II. III. VI. ternarius binarium tertia sui parte vincit, idem ternarius a senario tota sui quantitate superatur, id est tribus, idemque ipse ternarius medietate minoris vincit minorem, id est uno, et medietate maioris a maiore termino vincitur, id est tribus. Senarii enim medietas ternarius est.

In geometrica vero medietate neque eisdem suis partibus medius vel vincit minorem vel a maiore vincitur, neque eadem parte vel minoris minorem superat vel maioris a maiore relinquitur, sed qua parte* sua medius terminus minorem superat, eadem parte* sua maior terminus medium vincit, quod est ut medietas atque extremitas aequalibus* medietatem et extremitatem reliquam suis partibus* supervadant.
In hac enim dispositione, quae est IIII. VI. VIIII. tertia sui parte medius senarius quaternarium superat, id est duobus, et tertia sui parte rursus novenarius senarium vincit, id est tribus.

Bem.: Für Boethius sind die Grenzen a, b und die Medietäten A, H, G aus $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$

---

* ? qua parte … eadem parte $\longleftrightarrow$ aequalibus … partibus

Arithmetrische Medietät

$$\boxed{a < A < b} \qquad \text{z.B.} \qquad \boxed{2 < 3 < 4}$$

$$\exists p \in \mathbb{N} \left\{ \left[\begin{array}{l} a + \frac{1}{p} A = A \\ \text{und} \\ A + \frac{1}{p} A = b \end{array} \right] \right. , \quad \begin{array}{c} \exists m, n \in \mathbb{N} \\ m \neq n \end{array} \left\{ \left[\begin{array}{l} a + \frac{1}{m} a = A \\ \text{und} \\ A + \frac{1}{n} b = b \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 2 + \frac{1}{3} 3 = 3 \\ \\ 3 + \frac{1}{3} 3 = 4 \end{array} \right] , \left\{ \left[\begin{array}{l} 2 + \frac{1}{2} 2 = 3 \\ \\ 3 + \frac{1}{4} 4 = 4 \end{array} \right. \right.$$

Harmonische Medietät

$$\boxed{a < H < b} \qquad \text{z.B.} \qquad \boxed{2 < 3 < 6}$$

$$\begin{array}{c} \exists m, n \\ m \neq n \end{array} \left\{ \left[\begin{array}{l} a + \frac{1}{m} H = H \\ \text{und} \\ H + \frac{1}{n} H = b \end{array} \right] \right. , \quad \exists p \in \mathbb{N} \left\{ \left[\begin{array}{l} a + \frac{1}{p} a = H \\ \text{und} \\ H + \frac{1}{p} b = b \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 2 + \frac{1}{3} 3 = 3 \\ \\ 3 + \frac{1}{1} 3 = 6 \end{array} \right] , \left\{ \left[\begin{array}{l} 2 + \frac{1}{2} 2 = 3 \\ \\ 3 + \frac{1}{2} 6 = 6 \end{array} \right. \right.$$

Geometrische Medietät

$$\boxed{a < G < b} \qquad \text{z.B.} \qquad \boxed{4 < 6 < 9}$$

$$\forall p \in \mathbb{N} \left\{ \overbrace{\left[\begin{array}{l} a + \frac{1}{p} G \neq G \\ \text{oder} \\ G + \frac{1}{p} G \neq b \end{array} \right]}^{\text{Nicht A,}} \right. , \quad \forall p \in \mathbb{N} \left\{ \overbrace{\left[\begin{array}{l} a + \frac{1}{p} a \neq G \\ \text{oder} \\ G + \frac{1}{p} b \neq b \end{array} \right.}^{\text{nicht H,}} \right. \quad \exists p \in \mathbb{N} \left\{ \overbrace{\left[\begin{array}{l} a + \frac{1}{p} G = G \\ \\ G + \frac{1}{p} b = b \end{array} \right.}^{\text{sondern.}} \right. \quad \begin{array}{l} 4 + \frac{1}{3} 6 = 6 \\ \\ 6 + \frac{1}{3} 9 = 9 \end{array}$$

<u>Definition</u> nach Boethius' „De institutione mathematica" (0 < 5. Jhdt.).

Namque in arithmetica proportione medius terminus eadem sua parte
et minorem praecedit et a maiore praeceditur,
sed alia parte minoris, alia vero parte maioris.

Contrarie armonica medietas proportiones habet.

Namque non eadem parte sua medius terminus in hac proportione
vel minorem vincit vel a maiore superatur,
sed eadem parte minoris minorem superat,
qua parte maioris a maiore superatur.

Denn in der arithmetischen Verhältnismäßigkeit** übertrifft der mittlere Term mit demselben Teil von ihm sowohl den kleineren [Term] als er auch vom größeren übertroffen wird,
aber mit einem anderen Teil vom kleineren, mit einem in der Tat noch anderen Teil vom größeren.

$$\boxed{A} : A = a + \frac{1}{p}A \text{ und } b = A + \frac{1}{p}A \text{ für ein } p \quad ; \quad \text{aber: } A = a + \frac{1}{m}a \text{ und } b = A + \frac{1}{n}b \text{ für ein } m \neq n$$

Entgegengesetzt* hat das harmonische Mittel die Verhältnisse.

Denn mit demselben Teil von ihm besiegt der mittlere Term in dieser Verhältnismäßigkeit
weder den kleineren, noch wird er vom größeren überragt,
sondern mit demselben Teil des kleineren [Terms] überragt er den kleineren,
mit welchem Teil des größeren er vom größeren überragt wird.

$$\text{nicht } \boxed{A} : H \neq a + \frac{1}{p}H \text{ oder } b \neq H + \frac{1}{p}H \text{ für alle } p \quad ; \quad \text{sondern } \boxed{H} : H = a + \frac{1}{p}a ,\ b = H + \frac{1}{p}b \text{ für ein } p$$

Bem.: Bei Boethius sind A, H, a, b, p, m, n aus $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$

*$(H - a) : (b - H) \not\equiv 1 : 1$; ** s. „Achtung!" Seite 7

Anmerkung 1

Das Zahlenverhälnis $\mathbf{H : a \equiv a+\frac{1}{p}a : a \equiv p+1 : p}$

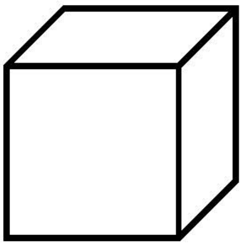
$$\left(\mathbf{p = 1 \triangleq \text{ proportio duplex ; } p > 1 \triangleq \text{ proportio superparticularis}}\right)$$

wird von Boethius (0 < 5. Jhdt.) in „de institutione arithmetica“ und äußerst ausführlich in „de institutione musica“ behandelt. In der antiken Musik(theorie) werden damit für n = 1, 2, 3 die Grundintervalle

Oktave = diapason $\triangleq$ 2 : 1 ,
Quinte = diapente $\triangleq$ 3 : 2 und
Quarte = diatessaron $\triangleq$ 4 : 3 beschrieben.

Zur Veranschaulichung einer, wie Boethiuis sagt., perfekten Harmonie benutzt er das Bild eines Würfels mit seinen Zahlen(verhältnissen) 6, 8, 12:

cybus



H(6, 12) = 8

12	Kanten (latera)	**12 : 6 ≡ 2 : 1 Oktave**
8	Ecken (anguli)	**12 : 8 ≡ 3 : 2 Quinte**
6	Flächen (superficies)	**8 : 6 ≡ 4 : 3 Quarte**

Anmerkung 2

Die arithmetische, harmonische und geometrische Medietät M lässt sich definieren durch

$$\mathbf{(b-M):(M-a) \equiv Y : X \;\; \text{für} \;\; X, Y \in \{a,b,M\}}.$$

Daher ergeben sich drei weitere Möglichkeiten für Medietäten, die Boethius auch beschreibt.

Nebenbemerkung

zu Boethius‘ „De inst. arithm.“ I, 1
„Proemium, in quo diviso mathematicae.”
Proömium, darin Unterteilung der Mathematik.

Nicht nur nach Boethius (und wie auch schon Platon sagte) ist die Arithmetik notwendig für das Studium der Geometrie, Musik(theorie) und Astronomie, die zusammen den Lernstoff des sogenannten Quadrigiums bilden und den Weg zur Philosophie und letzlich zur Theologie bereiten sollen.

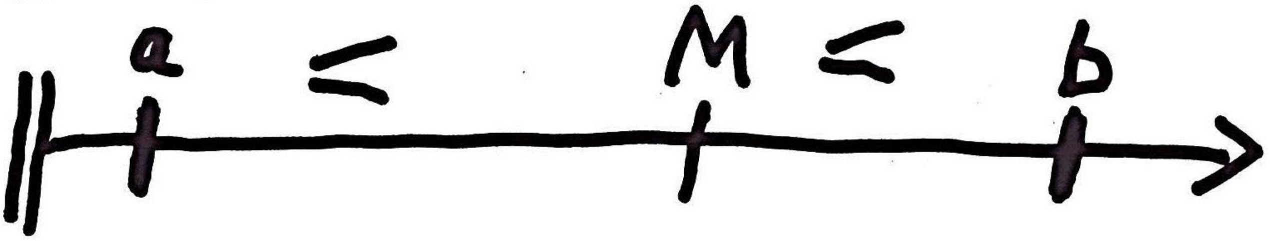
	multitudo **Vielheit**	**magnitudo** **Großheit**
ruhend, früher	Arithmetik	Geometrie
bewegt, später	Musik	Astronomie
Quantität	diskret	kontinuierlich
Größe	… , **3** , **2** $\boxed{1}$ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, …	
	$\longleftarrow$ unitas Einheit $\longrightarrow$	

Algebraischer Kommentar zu Boethius' 'De institutione arithmetica' liber II capitula 40–53

De proportionalitatibus

Die 3+3+4=10 antiken Medietäten

Das Bild



Die Gleichung(en)

$$(b-V)X = Y(W-a) > 0$$

d.h. Proportionalität(en)

$$(b-V):(W-a) \equiv Y:X$$

mit

$$V, W, X, Y \in \{a, M, b\} \subset \{1, 2, \ldots\}$$

I. $(X, Y) = (M, M)$

II. $(X, Y) = (b, M)$, III. (M, a)

31.1.21

Medietas (Proportionalitas)

$\boxed{A}$ritmetica $\boxed{H}$armonica

Ch Contraria harmonicae

$\boxed{G}$eometrica

Cg Contraria geometricae Cg Contraria geometricae

zu I.

x \ y	a	M	b
a	A	G	H
M	Cg	A	G
b	Ch	Cg	A

2)

zu x\Y	a	M	b
I. a	Ø	Ø	Ø
M	10.	Ø	Ø
b	8.	0	Ø

zu III.			
	Ø	9.	7.
	Ø	Ø	Ø
	10	Ø	Ø

$b = 2a \Leftrightarrow O = \boxed{H} = H$: Nota S.7

Boethius: 'De institutione arithmetica' 2.

Dispositio decem medietatum

LIII. Disponamus igitur cunctas medietates in ordinem, ut, cuiusmodi omnes sint, facillime possit intellegi.

	Arithmetica	prima	I	II	III
	Geometrica	secunda	I	II	IIII
	Armonica	tertia	III	IIII	VI
	Contraria armonicae	quarta	III	V	VI
	Contraria geometricae	quinta	II	IIII	V
	Contraria geometricae	sexta	I	IIII	VI
7.	Inter IIII prima	septima	VI	VIII	VIIII
8.	Inter IIII secunda	octava	VI	VII	VIIII
9.	Inter IIII tertia	nona	IIII	VI	VII
10.	Inter IIII quarta	decima	III	V	VIII

$\mathrm{I}.\ (b-M)X = Y(M-a)$ 29.7 4

$\boxed{A}$ $(b-M)a = a(M-a)$

$a+b = 2M$ $\underline{1,2,3}$

$\boxed{H}$ $(b-M)a = b(M-a)$ $\underline{3,4,6}$

$2ab = M(a+b)$ $\underline{2,3,6}$

$\boxed{Ch}$ $(b-M)b = a(M-a)$ $\underline{3,5,6}$

$a^2+b^2 = M(a+b$

$\boxed{G}$ $(b-M)M = b(M-a)$

$MM = ab$ $\underline{1,2,4}$

$\boxed{Cg}$ $(b-M)b = M(M-a)$

$(b-a)M = b^2$

$0 = MM + (b-a)M - b^2$

$2M = a-b \pm \sqrt{a^2-2ab+5b^2}$

$\underline{1,4,6}$

$\boxed{Cg'}$ $(b-M)M = a(M-a)$

$0 = MM + (a-b)M - a^2$

$2M = b-a + \sqrt{5a^2-2ab+b^2}$ $\underline{3,4,5}$

II.	$(b-M)X = Y(b-a)$	(5)
III.	$(b-a)X = Y(M-a)$	
$\emptyset$	$(b-M)a = a(b-a)$ $Ma = aa \Rightarrow \underline{M=a}$.	
$\emptyset$	$(b-a)a = a(M-a)$ $ba = aM \Rightarrow \underline{M=b}$	
$\emptyset$	$(b-M)a = b(b-a)$ $2ba - b^2 = Ma > ba \Rightarrow \underline{ba > b^2}$	
$\boxed{7.}$	$(b-a)a = b(M-a)$ $2ba - a^2 = Mb$	$\underline{9, 8, 6}$
$\boxed{8.}$	$(b-M)b = a(b-a)$ $b^2 - ab + a^2 = Mb$	$\underline{9, 7, 6}$ $\underline{8, 6, 4}$
$\emptyset$	$(b-a)b = a(M-a)$ $b^2 - ab + a^2 = aM < ab \Rightarrow \underline{(b-a)^2 < 0}$	

II. $(b-M)x = y(b-a)$ (6)

III. $(b-a)x = y(M-a)$

Ø $(b-M)a = M(b-a)$

$ba = Mb \Rightarrow$ $\underline{M=a}$

9. $(b-a)a = M(M-a)$

$0 = MM - Ma - (b-a)a$

$2M = a + \sqrt{4ab-3a^2}$ $\underline{7,6,4}$

10. $(b-M)M = a(b-a)$

$0 = MM - bM + a(b-a)$

$M = b + \sqrt{b^2-4ab+4a^2}$ $\underline{8,5,3}$

Ø $(b-a)M = a(M-a)$

$a^2 = M(2a-b) < b(2a-b)$?

$\Rightarrow a^2-2ab+b^2 < 0 \Rightarrow \underline{(a-b)^2 < 0}$

H | $(b-M)\,b = M(b-a)$ 7

O | $b^2 = M(2b-a)$ $\underline{6,4,3}$

$b=2a \Rightarrow 4a^2 = M3a \Rightarrow 3M = 4a$

Nota | H $= \boxed{H} \Longleftrightarrow b^2 : 2b-a = 2ba : (a+b)$

$\Longleftrightarrow b(a+b) = 2a(2b-a)$

$\Longleftrightarrow b^2 - 3ab + 2a^2$

$\Longleftrightarrow 2b_{1|2} = 3a \pm \sqrt{9a^2 - 8a^2}$

$\Longleftrightarrow 2b_1 = 4a \;,\; b_2 = 2a$

$\Longleftrightarrow b_1 = 2a \;,\; b_2 = a \Longleftrightarrow \underline{b = 2a}$

Ø | $(b-a)\,b = M(M-a)$

$0 = MM - aM - (b-a)\,b$

$b = ra \Rightarrow 0 = M^2 - aM - (r^2a^2 - ra^2)$

$\Rightarrow 2M = a + \sqrt{a^2 + 4a^2(r^2 - r)}$

$\Rightarrow 2M = a + a\sqrt{4r^2 - 4r + 1}$

$\Rightarrow 2M = a + a(2r-1) = 2ra = 2b$

$\Rightarrow \underline{M = b}$

(8

$\emptyset$ | $(b-M)M = b(b-a)$

$b(b-a) = (b-M)M < (b-M)b$

$\Rightarrow b-a < b-M \Rightarrow \underline{M < a}$

$\emptyset$ | $(b-a)M = b(M-a)$

$-aM = -ba \Rightarrow \underline{M = b}$

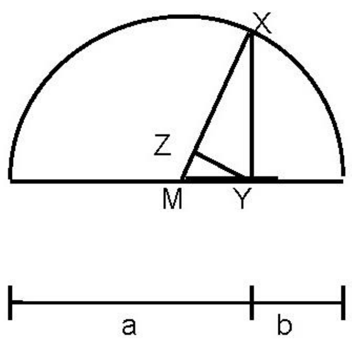
V

Analogie- bzw. Symmetriebetrachtungen zum arithmetischen und harmonischen Mittel*

Den folgenden Ausführungen liegt die Absicht zugrunde, das arithmetische und harmonische Mittel unter dem Aspekt von Ähnlichkeit und Gleichwertigkeit darzustellen. In diesem Zusammenhang werden daher Begriffe wie Analogie und Symmetrie zur Interpretation der Beziehungen zwischen den beiden Mitteln im Vordergrund stehen. Auf eine im mathematischen Sinn präzise Definition dieser Begriffe soll allerdings verzichtet werden.

Bei der üblichen Herleitung und Darstellung des bekannten geometrischen und algebraischen Sachverhaltes wird das geometrische Mittel als „verbindendes" drittes mit einbezogen.

I.



Arithmetisches Mittel: $A(a, b) = \frac{1}{2}(a + b) = \overline{MX}$

Geometrisches Mittel: $G(a, b) = \sqrt{ab} = \overline{XY}$

Harmonisches Mittel: $H(a, b) = 2\frac{ab}{a+b} = \overline{XZ}$

Nach Definition, bzw. Konstruktion gilt:

$\boxed{H : G = G : A}$ und $\boxed{H \leq G \leq A}$

Grundlegend für alle weiteren Betrachtungen ist die als formaler Ausdruck für analoge und symmetrische Korrespondenzen zu verstehende Symbolkette

II. **X Y <—> Y' X'**

oder allgemein **... X Y Z ... <—> ... Z' Y' X' ...**

Zusammen mit den beiden erwähnten Begriffen wird dieser formale Ausdruck offensichtlich auch durch die Kommutativität charakterisiert. Er stellt zunächst nur ein allgemeines Zeichenschema dar, das erst durch die Zuordnung zu definierten Symbolen eine Bedeutung erhält. In den verschiedenen und mehrdeutigen Zuordnungsmöglichkeiten mag dann der vereinheitlichende Aspekt und Wert der formalen Symbolkette gesehen werden. Konkrete geometrische und algebraische Fragestellungen sollen dabei in den Hintergrund treten und vorwiegend der formale Aufbau und Zusammenhang der mathematischen Ausdrücke des arithmetischen und harmonischen Mittels zur Diskussion stehen. In dem angesprochenen Sinn führen Ähnlichkeit und Gleichwertigkeit, bzw. Analogie und Symmetrie auf die Zuordnungen :

III. **... X Y Z ... <—> ... Z' Y' X' ...**

a) $H \leq G \leq A$

b) $H : G = G : A$

c) $G : H = A : G$

d) $H \cdot A = G \cdot G = A \cdot H$

---

* Der Pythagoreer Archytas von Tarent (428–365) verfasste eigens eine *Arithmetica Universalis*, die auf den drei Grundannahmen des arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittels aufbaute, um so auch mathematisch die Einheit von Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik zu begründen. (*Mainzer, Klaus*: Geschichte der Geometrie (1980))

Die Ungleichung III a) zeigt das geometrische Mittel eingeschlossen durch das harmonische und das arithmetischen. Aufgrund dieser Eigenschaft läßt sich das geometrische Mittel $G(a, b) = \sqrt{ab}$ zweier Zahlen a und b nach dem schon in der Antike bekannten Iterationsverfahren* approximativ bestimmen. Es steht sozusagen inmitten zweier immer enger werdender Grenzen, die sich aus den beiden anderen Mitteln fortlaufend errechnen. Dagegen kann in III b), c) - besonders im Hinblick auf die weiteren Ausführungen - das Paar

$$\text{harmonisches Mittel} \quad H(a, b) = 2\frac{ab}{a+b}$$

$$\text{arithmetisches Mittel} \quad A(a, b) = \frac{a+b}{2}$$

als im Vordergrund stehend angesehen werden, das seine Korrespondenz durch das verbindende dritte Mittel $G(a, b)$ erhält. Dem entspricht die Konstruktion am Halbkreis und, anhand der Gleichungen, die Berechnung von $H(a, b)$ aus $A(a, b)$ über die Zwischenstufe $G(a, b)$, bzw. $(G(a, b))^2$. Da von den beiden algebraischen Ausdrücken $H(a, b)$ und $A(a, b)$ der letztere als einfacher und elementarer erscheint, kann man hier von einer gewissen formalen Asymmetrie sprechen. Dem entspricht, dass die Konstruktion von $A(a, b)$ aus $H(a, b)$ umständlicher sein dürfte als umgekehrt.

Der wesentliche Punkt der Symmetriebetrachtungen zum arithmetischen und harmonischen Mittel ist nun der, dass man im Schema von III weitere Zeilen hinzufügen kann, die einerseits das geometrische Mittel nicht enthalten, aber es andererseits formal so ersetzt wird, dass eine direkte Korrespondenz zu III a - d besteht. Um den dadurch direkteren Bezug von $A(a, b)$ und $H(a, b)$ herzustellen, werden anstelle der Proportionen von Zahlen, bzw. Produkte von Zahlen und ihren Kehrwerten <u>Kompositionen von Operationen</u> betrachtet. [Im Folgenden werden die Begriffe Operation, Operator als Synonyme für Abbildungen (nach der gängigen mathematischen Definition) verwendet.]

IV. a) (Definition): $\Sigma(x, y) = x + y$ — Summe

$K_1(x) = \frac{1}{x}$, $K_2(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ — Kehrwert

$id_1(x) = x$; $id_2(x, y) = (x, y)$ — Identität

$\Delta(x) = (x, x)$ — identische Verdoppelung

$\nabla(x) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right)$ — id. Verdoppelung des Kehrwertes

Mit der Schreibweise der Komposition von Operationen (Nacheinanderausführung von Abbildungen)
f und g gemäß $f(g(x)) = f \circ g(x)$
und der abkürzenden Operatorschreibweise für $f \circ g(x) = h(x)$
durch $f \circ g = h$
erhält man aus der Definition IV. a)

IV. b) (Folgerung) $K_1 \circ K_1 = id_1$; $K_2 \circ K_2 = id_2$

$$\Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ \nabla = id_1$$

$$\Delta \circ K_1 = K_2 \circ \Delta = \nabla = K_2 \circ \nabla \circ K_1$$

Bemerkung:
Aufgrund der Assoziativität der Komposition von Operationen, d.h. (f o g) o h = f o (g o h), können die Klammern in den Operatorketten beliebig gesetzt und somit auch weggelassen werden.

* Archytas von Tarent (um 400 v.Chr.), ein Freund Platons

Die Zerlegung von H (a , b) und A (a , b) in die elementaren Operationen aus IV. a) führt zu:

$$H(a,b) = 2\,\frac{ab}{a+b} = \boldsymbol{\Sigma}\left(\frac{ab}{a+b},\ \frac{ab}{a+b}\right) = \boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\Delta}\left(\frac{ab}{a+b}\right)\right) = \boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\Delta}\left(K_1\left(\frac{a+b}{ab}\right)\right)\right)$$

$$= \boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\Delta}\left(K_1\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right)\right) = \boldsymbol{\Sigma}\left(\boldsymbol{\Delta}\left(K_1\left(\boldsymbol{\Sigma}\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}\right)\right)\right)\right)$$

$$= \boldsymbol{\Sigma}(\Delta(K_1(\boldsymbol{\Sigma}(K_2(a,b)))))$$

$$= \boldsymbol{\Sigma} \circ \boldsymbol{\Delta} \circ K_1 \circ \boldsymbol{\Sigma} \circ K_2\ (a,b)$$

V.

$$\boxed{H = \boldsymbol{\Sigma} \circ \boldsymbol{\Delta} \circ K_1 \circ \boldsymbol{\Sigma} \circ K_2}$$

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2} = K_1\left(\frac{2}{a+b}\right) = K_1\left(\Sigma\left(\frac{1}{a+b},\ \frac{1}{a+b}\right)\right) = K_1\left(\Sigma\left(\Delta\left(\frac{1}{a+b}\right)\right)\right)$$

$$= K_1(\Sigma(\Delta(K_1(a+b)))) = K_1(\Sigma(\Delta(K_1(\Sigma(a,b)))))$$

$$= K_1 \circ \Sigma \circ \Delta \circ K_1 \circ \Sigma\ (a,b)$$

VI.

$$\boxed{A = K_1 \circ \Sigma \circ \Delta \circ K_1 \circ \Sigma}$$

Somit führen die Zerlegungen in elementare Bestandteile zu der Korrespondenz

VII.

$$\boxed{\begin{array}{c} H = \Sigma \circ \Delta \circ K_1 \circ \Sigma \circ K_2 \ \longleftrightarrow\ K_1 \circ \Sigma \circ \Delta \circ K_1 \circ \Sigma = A \\ Y \circ K_2 \ \longleftrightarrow\ K_1 \circ Y \\ X \ \longleftrightarrow\ X' \end{array}}$$

Durch Einsetzen von $\Delta \circ K_1 = K_2 \circ \Delta$ in die linke, bzw. rechte Seite von VII folgen zwei Darstellungen der beiden Mittel, deren Symmetrie eine mathematisch und physikalisch aussagekräftige Interpretation ermöglichen.

VIII.a

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \Sigma \circ K_2 \circ \Delta \circ \Sigma \circ K_2 & \longleftrightarrow & K_1 \circ \Sigma \circ \Delta \circ K_1 \circ \Sigma \\ X \circ \Delta \circ X & \longleftrightarrow & X' \circ \Delta \circ X' \end{array}}$$

VIII.b

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \Sigma \circ \Delta \circ K_1 \circ \Sigma \circ K_2 & \longleftrightarrow & K_1 \circ \Sigma \circ K_2 \circ \Delta \circ \Sigma \\ \Sigma \circ \Delta \circ X & \longleftrightarrow & X \circ \Delta \circ \Sigma \end{array}}$$

Die Umformung von VII zu VIII.a, bzw. VIII. b bedeutet einen Schritt zu höherer Symmetrie in zwei komplementär zueinander stehende Richtungen: Höhere Symmetrie der Teile zu Ungunsten des Ganzen und höhere Symmetrie des Ganzen zu Ungunsten der Teile.

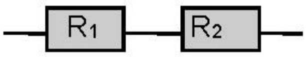
Zu VIII.a: Hier erhalten die beiden Seiten selbst eine symmetrische Gestalt, unterscheiden sich aber durch die Operationen $X = \Sigma \circ K_2$ und $X' = K_1 \circ \Sigma$.
Der Unterschied von $X = \Sigma \circ K_2$ und $X' = K_1 \circ \Sigma$ ist insofern sogar maximal, als er ein grundsätzliches Verbot beim Rechnen mit (reellen) Zahlen darstellt.

$$\Sigma \circ K_2 \ :\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \neq \frac{1}{x+y}\ :\ K_1 \circ \Sigma,\ \text{ für } x, y \neq 0$$

Zu VIII.b: Dagegen sind hier die beiden Seiten selbst nicht symmetrisch aufgebaut, aber aus denselben Operationen spiegelsymmetrisch zueinander zusammengesetzt.

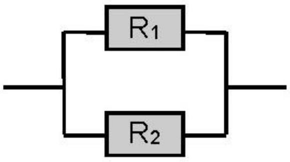
Die Zerlegungen in VIII.b stellen Ausdrücke dar, die direkt physikalisch interpretiert werden können, und zwar durch die Reihen- und Parallelschaltung zweier ohmscher Widerstände.

IX. a)

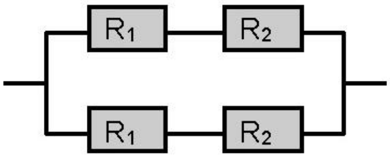


$$R_r = R_1 + R_2 = \boldsymbol{\Sigma}(R_1, R_2)$$

IX. b)

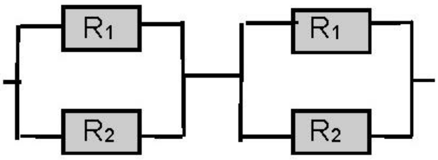


$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = K_1 \circ \boldsymbol{\Sigma} \circ K_2 (R_1, R_2)$$



$$R_A = \frac{(R_1 + R_2)(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2) + (R_1 + R_2)} = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

$$= K_1 \circ \boldsymbol{\Sigma} \circ K_2 \circ \Delta \circ \boldsymbol{\Sigma}(R_1, R_2)$$



$$R_H = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2\,\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$= \boldsymbol{\Sigma} \circ \boldsymbol{\Delta} \circ K_1 \circ \boldsymbol{\Sigma} \circ K_2 (R_1, R_2)$$

Die Korrespondenz der beiden Mittel $A = R_A$ und $H = R_H$ läßt sich also auch durch den Begriff der Kommutativität formal und anschaulich charakterisieren. In der oben angeführten physikalischen Realisierung folgt aufgrund einer direkten sprachlichen Übersetzung der Schaltbilder:

$A = R_A =$	Parallelschaltung	zweier gleicher	Reihenschaltungen
	$K_1 \circ \boldsymbol{\Sigma} \circ K_2$	$\boldsymbol{\Delta}$	$\boldsymbol{\Sigma}$
$H = R_H =$	Reihenschaltung	zweier gleicher	Parallelschaltungen
	$\boldsymbol{\Sigma}$	$\boldsymbol{\Delta}$	$K_1 \circ \boldsymbol{\Sigma} \circ K_2$

Nun folgt der Schritt von der Korrespondenz

$$H \longleftrightarrow A$$
$$X \longleftrightarrow X'$$

zur Gleichung $\quad Y X = X' Y'$

bzw. $\quad X Y = Y' X'$.

Wegen $\Delta \circ K_1 = K_2 \circ \Delta = \nabla = K_2 \circ \nabla \circ K_1$ (IV. b) folgen aus z.B. VII die Gleichungen

X. $\quad K_1 \circ H = K_1 \circ \Sigma \circ K_2 \circ \Delta \circ \Sigma \circ K_2 = A \circ K_2$

a) $\quad K_1 \circ H = K_1 \circ \Sigma \circ K_2 \circ \nabla \circ K_1 \circ \Sigma \circ K_2 = A \circ K_2$

b) $\quad K_1 \circ H = K_1 \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ K_2 = A \circ K_2$

c) $\quad H \circ K_2 = \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma = K_1 \circ A$

Aufgrund dieser Darstellung des harmonischen und arithmetischen Mittels ergibt sich also eine weitere Interpretation ihrer Korrespondenz. Sie sind aus derselben Operatorkette gebildet, wobei sie jeweils als das Komplement der Kehrwertoperationen K_1, bzw. K_2 erscheinen.

Harm. Mittel

XI. [X. b)] $$K_1 \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ K_2$$

Arithm. Mittel

Nun werden noch die beiden Mittel A und H in die Form einer Operatorgleichung gebracht, die analog zur Gleichung $H \cdot A = G \cdot G$, aufgebaut ist.

Aus der Darstellung von H und A in XI erhält man wegen $\nabla = K_2 \circ \nabla \circ K_1$, $\Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ \nabla = id_1$

$$H \circ \nabla \circ A = (\Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ K_2) \circ \nabla \circ (K_1 \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma)$$

$$H \circ \nabla \circ A = (\Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ (K_2 \circ \nabla \circ K_1)) \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma$$

$$= \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \qquad = H \circ K_2 = K_1 \circ A \quad \text{[X. c)]}$$

XII. kurz: $\boxed{H \;\square\; A \;=\; X \;\square\; X}$ $\quad X = \Sigma$ = Reihenschaltung [IX. a)]

und entsprechend

$$A \circ \nabla \circ H = (K_1 \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma) \circ \nabla \circ (\Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ K_2)$$

$$A \circ \nabla \circ H = K_1 \circ (\Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ \nabla) \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ K_2$$

$$= K_1 \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ K_2 \qquad \text{[X. b)]}$$

$$= (K_1 \circ \Sigma \circ K_2) \circ \nabla \circ (K_1 \circ \Sigma \circ K_2) = A \circ K2 = K1 \circ H \qquad \text{[X. a)]}$$

XIII. kurz: $\boxed{A \;\square\; H \;=\; X' \;\square\; X'}$ $\quad X' = K_1 \circ \Sigma \circ K_2$ = Parallelschaltung [IX. b)]

Die Verknüpfung $\square = \circ \nabla \circ$ ist nur für den trivialen Fall A = H kommutativ. (Nichtkommutativität der Komposition von Operationen, d.h., im Allgemeinen gilt $f \circ g \neq g \circ f$). Man erhält also eine zu III. d) analoge Korrespondenz.

XIV. $\boxed{H \square A \;=\; X \square X \;=\; K_1 \circ A \;\Longleftrightarrow\; K_1 \circ H \;=\; X' \square X' \;=\; A \square H}$

Zusammenfassende Darstellung von III, X und XIV:

$$H \leq G \leq A$$

$$H : G = G : A$$

$$G : H = A : G$$

$$H \cdot A = G \cdot G \Longleftrightarrow G \cdot G = A \cdot H$$

$\boxed{\textbf{... X Y Z ...} \Longleftrightarrow \textbf{... Z' Y' X' ...}}$

$$H \circ K_2 = K_1 \circ A = H \,\square\, A = X \,\square\, X \;\leq\; X' \,\square\, X' = A \,\square\, H = K_1 \circ H = A \circ K_2$$

$$K_1 \circ H = K_1 \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma \circ K_2 = A \circ K_2$$

$$H \circ K_2 = \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma = K_1 \circ A$$

Der Kehrwert des harmonischen Mittels ist das arithmetrische Mittel der Kehrwerte.

Aufgrund und mit Hilfe der elementaren Operationen und ihrer Komposition könnte man nun z.B. der folgenden Verallgemeinerung nachgehen:

Es sei $\Sigma(x, y) = x + y$

ersetzt durch die gewichtete Summe $\Sigma_{p,q}(x, y) = px + qy$.

Damit ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel

$$A = K_1 \circ \Sigma \circ \nabla \circ \Sigma$$

der Ausdruck $A_{p,q} = K_1 \circ \Sigma_{p,q} \circ \nabla \circ \Sigma_{p,q}$.

Wegen $A_{p,q}(x, y) = \dfrac{px + qy}{p + q}$

kommt man also zur Formel für die Teilung einer Strecke der Länge (b - a) im Verhältnis p : q für $a = x \leq y = b$.

Analog erhält man $H_{p,q} = \Sigma_{p,q} \circ \nabla \circ \Sigma_{p,q} \circ K_2$

$$H_{p,q}(x, y) = \frac{p + q}{py + qx} xy$$

und schließlich als eine Verallgemeinerung des geometrischen Mittels

$$G_{p,q} = \sqrt{A_{p,q} \cdot H_{p,q}}$$

den Ausdruck $G_{p,q}(x, y) = \sqrt{\dfrac{px + qy}{py + qx} xy}$

Allgemeine Bemerkung:
Die vorgestellten Betrachtungen sind in erster Linie im Rahmen von Meditation und Mnemotechnik hinsichtlich mathematischer Gegenstände anzusiedeln. So läßt sich auch der Anfang und das Ende des Weges von den Fibonacci-Zahlen zur Gleichung des Goldenen Schnittes zusammenfassend als Vertauschung von Indizes und Exponenten analog und symmetrisch darstellen.

a_0, a_1 beliebig, aber fest vorgegeben

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$s^{n+2} = s^{n+1} + s^n$$

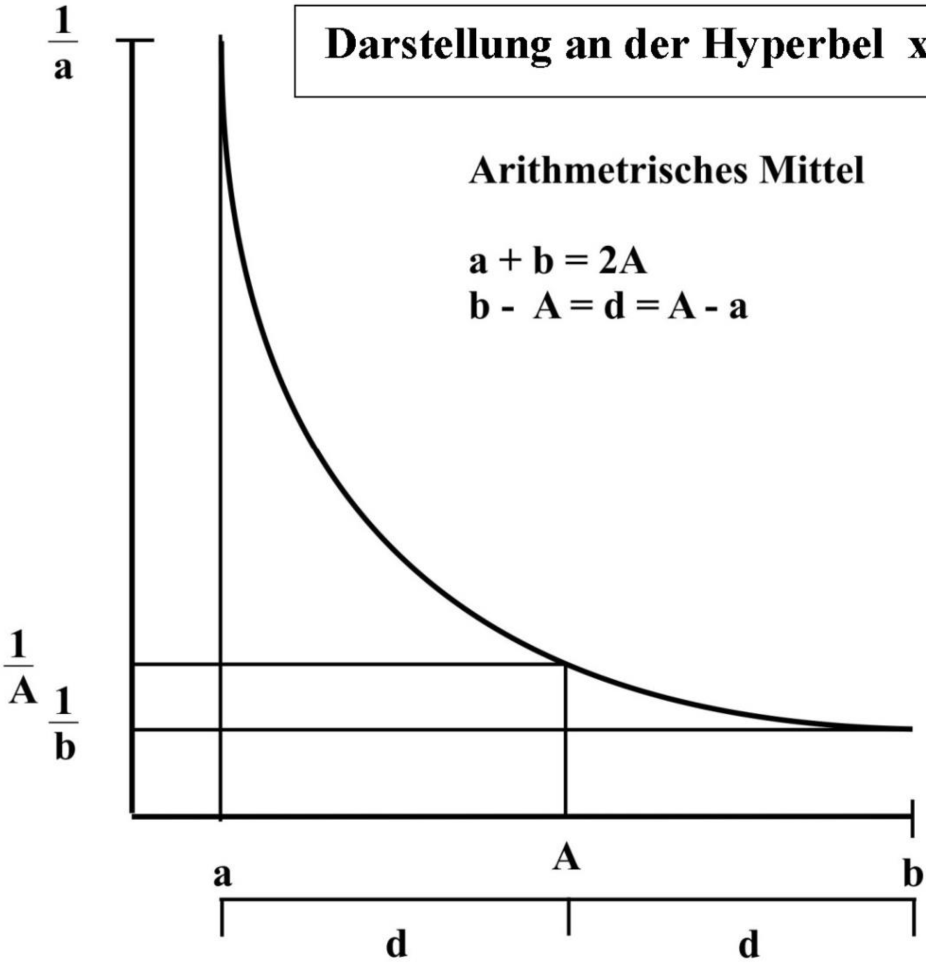
$$s = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$$

Darstellung an der Hyperbel $xy = 1$

Arithmetrisches Mittel

$a + b = 2A$

$b - A = d = A - a$

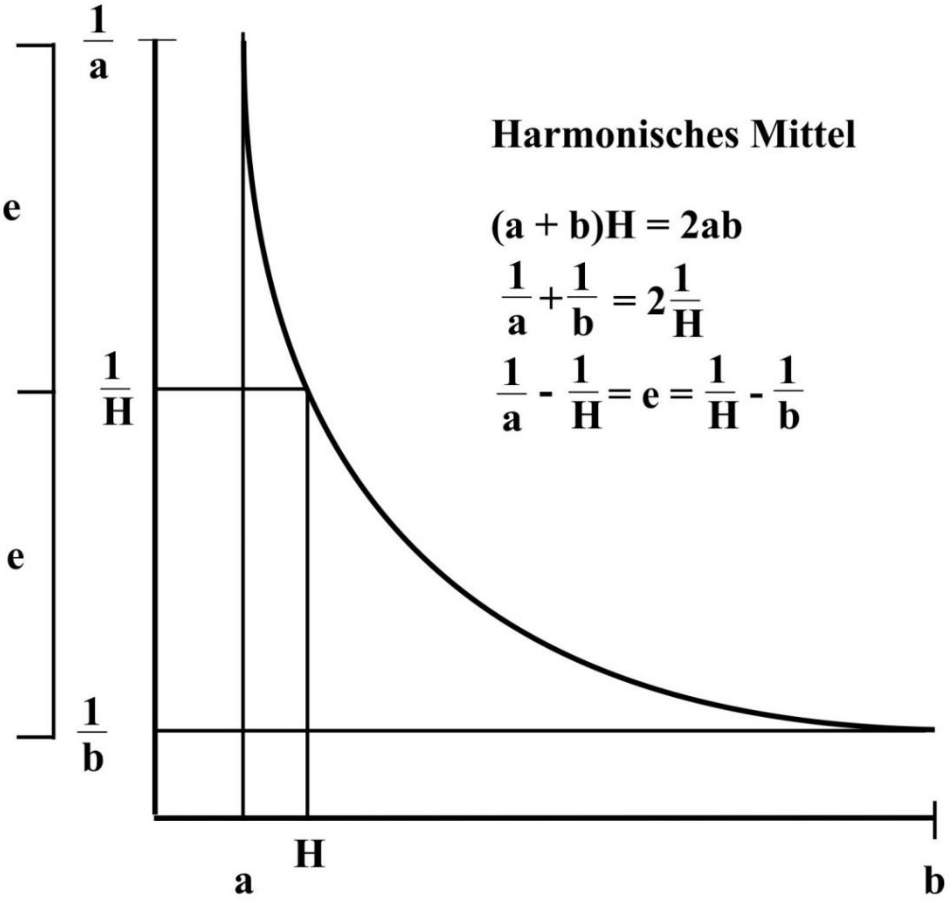


Harmonisches Mittel

$(a + b)H = 2ab$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2\frac{1}{H}$$

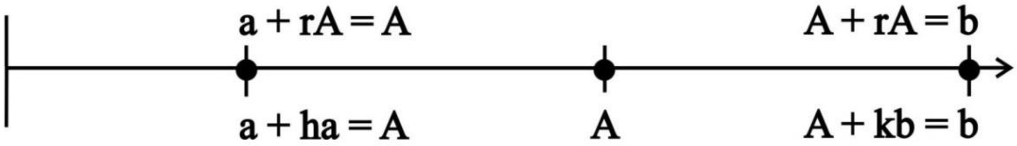
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{H} = e = \frac{1}{H} - \frac{1}{b}$$



Darstellung an der Geraden

$\boxed{\text{A}}$rithmetische Medietät

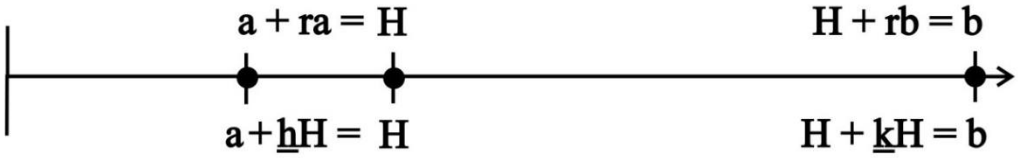
$$r = \frac{b - a}{a + b}$$



$$\frac{b - a}{2a} = h \qquad > \qquad k = \frac{b - a}{2b}$$

$\boxed{\text{H}}$armonische Medietät

$$r = \frac{b - a}{a + b}$$



$$\frac{b - a}{2b} = \underline{h} \qquad < \qquad \underline{k} = \frac{b - a}{2a}$$

<u>Theorem</u>: A – H = dr = aber … ? !