Index notabiliorum:

Prop. 1. est lemma, cujus ope triangula ex puncto fixo A incipientia transmutantur in rectangula MNF rectae AMN per punctum fixum < - > transeunti normaliter applicata. fig. 1. 2.

Prop. 2. 3. 4. 5. sunt lemmata valde generalia circa differentiam quatenus ab excessu et defectu animo abstrahitur, et serviunt ad demonstrationes quadraturarum apagogicas per sola inscripta.[1]

Prop. 6. est spinosissima in qua morose demonstratur certa quaedam spatia rectilinea gradiformia itemque polygona eousque continuari posse, ut inter se vel a curvis differant quantitate minore quavis data, quod ab aliis plerumque assumi solet. Praeteriri initio ejus lectio potest, servit tamen ad fundamenta totius Methodi indivisibilium[2] firmissime jacienda.

Prop. 7. fructum continet omnium praecedentium, et ostendit, quomodo figurae curvilineae possint resolvi in triangula et quomodo si his triangulis aequalia exhibeantur rectangula, sector alterius figurae in [quadrilineum] alterius figurae transformari possit.

PROPOSITIO PRIMA

> Si per trianguli ABC tres angulos totidem transeant rectae parallelae interminatae AD. BE. CF, triangulum erit dimidium rectanguli, sub CE intervallo duarum parallelarum BE. CF, et sub AG portione tertiae AD, intercepta inter puncta, quibus ea angulo trianguli A, et opposito lateri BC, si opus est producto occurrit.

[1] Der klassische Beweis der Gleichheit zweier Flächen beruht auf einer doppelten *reductio ad absurdum*: Durch Einschreibung und Umschreibung geeigneter Figuren werden beide Alternativen – die eine Fläche ist echt kleiner bzw. echt größer – jeweils einzeln widerlegt. Durch Übergang zum Absolutbetrag reduziert sich die Widerlegung der beiden Annahmen $A<B$ und $A>B$ auf die Widerlegung der dazu äquivalenten Annahme $|A-B| \neq 0$.

[2] Leibniz spricht außer im Scholium (Variante) zu Satz 11 nie von Indivisibeln sondern stets von der „Indivisibelnmethode“ und meint damit ganz allgemein die seit Cavalieris *Geometria indivisibilibus continuorum ...* von 1635 neu entwickelten Techniken zur Flächen- und Volumenbestimmung. Während Cavalieri die Übertragbarkeit von Verhältnissen zwischen den um eine Dimension reduzierten Schnitten, den so genannten Indivisibeln, auf die Gesamtfiguren postulierte, stellten beispielsweise Wallis in der *Arithmetica infinitorum* oder Roberval in der erst postum veröffentlichten *Traité des indivisibles* auf arithmetische Summierungen hinauslaufende infinitesimale Überlegungen an.

Verzeichnis der bemerkenswerteren Sätze:

Satz 1 ist ein Lemma, mit dessen Hilfe von einem festen Punkt A beginnende Dreiecke in Rechtecke MNF verwandelt werden, die an einer durch den festen Punkt verlaufenden Geraden AMN senkrecht angefügt sind. Fig. 1. 2.

Die Sätze 2, 3, 4 und 5 sind sehr allgemeine Lemmata bezüglich der Differenz insofern, als vom Überschuss und Mangel gedanklich abgesehen wird, und sie dienen den indirekten Beweisen der Quadraturen nur durch Einbeschriebenes.

Der Satz 6 ist sehr spitzfindig; in ihm wird peinlich genau bewiesen, dass einige bestimmte geradlinige treppenförmige Flächen und ebenso Polygone soweit aneinander gereiht werden können, dass sie sich untereinander oder von den Kurven um eine Quantität unterscheiden, die kleiner ist als jede beliebige gegebene, was von anderen meistens angenommen zu werden pflegt. Seine Lektüre kann zu Anfang übergangen werden, jedoch dient er dazu, die Fundamente für die ganze Indivisibelnmethode am sichersten zu legen.

Satz 7 enthält den Ertrag aller Vorhergehenden und zeigt, wie krummlinige Figuren in Dreiecke aufgelöst werden können, und wie, wenn zu diesen Dreiecken gleiche Rechtecke dargestellt werden, der Sektor der einen Figur in eine vierlinige Fläche einer anderen Figur umgeformt werden kann.

ERSTER SATZ

> Wenn durch die drei Winkel eines Dreiecks ABC ebenso viele unbegrenzte parallele Geraden AD, BE, CF hindurchgehen, wird das Dreieck die Hälfte des Rechtecks sein, welches unter dem Intervall CE der zwei Parallelen BE, CF und unter dem Teil AG der Dritten AD liegt, der zwischen den Punkten eingeschlossen ist, bei denen diese den Winkel A des Dreiecks und die notfalls verlängerte gegenüberliegende Seite BC trifft.

In BC productam agatur normalis AH[,] erunt triangula AHG. CEB similia[,] ergo ut AH ad AG ita CE ad CB, ac proinde rectangulum AG in CE[3] aequale rectangulo AH in CB seu duplo triangulo ABC. Itaque triangulum ABC rectanguli sub AG et CE dimidium erit. Quod asserebatur.

fig. 1

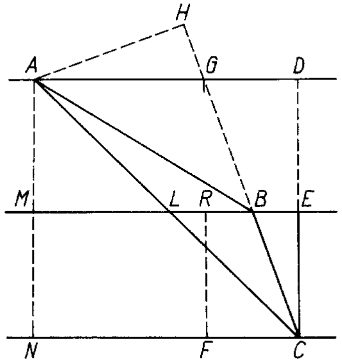
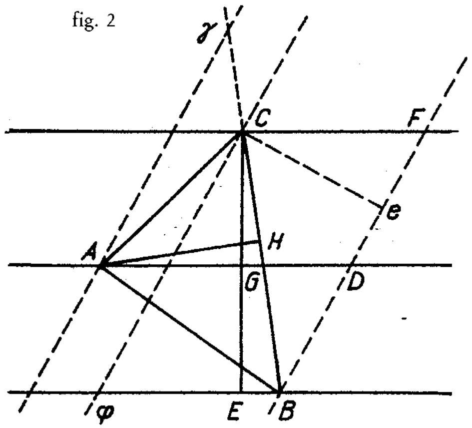


fig. 2



Scholium

Cum infinitis modis in eodem triangulo et parallelae duci, et intervalla eligi possint, patet omnia rectangula hujusmodi, (cum uni eidemque triangulo duplo aequentur) etiam fore aequalia inter se; ut rectangula CD in LB, CE in AG, Ce in Aγ; si idem in fig. 1. et 2. ponatur esse triangulum ABC.

Porro propositio, quam hic demonstravimus, lemma est, facile utique, et in proclivi positum, sed quod usus tamen habet late patentes: quoniam enim rectanguli et trianguli naturas in unum conjungit, utique foecundius esse debet, quam si non nisi alterutram contineret.[4] Ejus enim auxilio,

[3]Leibniz verwendet wie Viète das lateinische *in* – an, auf – zur Bezeichnung der Multiplikation. Wenn in der Übersetzung Rechteck AG · CE steht, sollte dies sowohl algebraisch als AG mal CE bzw. AG multipliziert mit CE als auch geometrisch als Konstruktion eines Rechtecks mit den Seiten AG und CE und entsprechendem Flächeninhalt gelesen werden.

[4]In *De ductibus*, Cc. 2, Nr. 697 aus dem Frühsommer 1673 formuliert Leibniz bei der Betrachtung von charakteristischen Dreiecken am Kreis die *Regula artis combinatoriae in geometria*: „Vor allem aber ist von großer Bedeutung, ähnliche Dreiecke, besonders rechtwinklige, herzustellen, mit ihrer Hilfe proportionale Strecken und mit deren Hilfe wieder gleiche Rechtecke zu gewinnen." [Übersetzung nach Mahnke 1926, 39]

Zur verlängerten Seite BC sei die Normale AH geführt, die Dreiecke AHG, CEB werden ähnlich sein, folglich wird wie AH zu AG so CE zu CB und daher das Rechteck AG · CE gleich dem Rechteck AH · CB oder dem doppelten Dreieck ABC sein. Deshalb wird das Dreieck ABC die Hälfte des Rechtecks unter AG und CE sein. Dieses wurde behauptet.

fig. 1

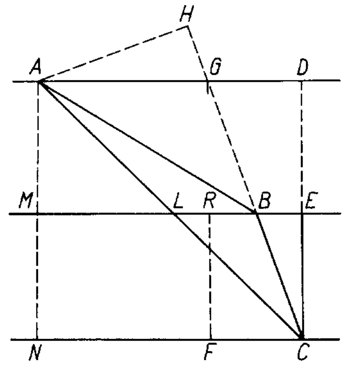
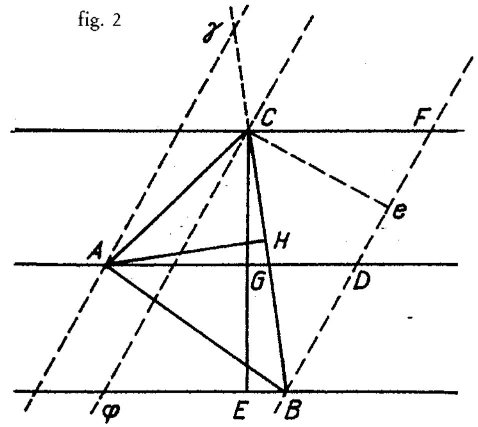


fig. 2



Scholium

Weil auf unendlich viele Arten bei demselben Dreieck sowohl Parallelen gezogen als auch Intervalle ausgewählt werden können, ist es offensichtlich, dass alle derartigen Rechtecke (weil sie ein- und demselben doppelten Dreieck gleich sind) auch untereinander gleich sein werden; wie die Rechtecke CD · LB, CE · AG, Ce · Aγ, wenn vorausgesetzt wird, dass das Dreieck ABC in Fig. 1 u. 2 dasselbe ist.

Ferner ist der Satz, den wir hier bewiesen haben, ein Lemma, das jedenfalls leicht und in leicht ausführbarer Form gegeben ist, das aber dennoch weitreichende Anwendungen hat: weil es nämlich die Naturen des Rechtecks und des Dreiecks zu Einem verbindet, muss es jedenfalls fruchtbarer sein, als wenn es nur eine von beiden enthielte. Mit seiner Hilfe nämlich werden sogar krummlinige Figuren in Dreiecke nutzbringend aufgelöst, während Cavalieri und andere hochgelehrte Männer diese nur in Par-figurae curvilineae etiam in triangula utiliter resolvuntur, cum Cavalerius aliique doctissimi viri[5] eas in parallelogramma tantum partiri soleant, generalem certe in triangula resolutionem, quod sciam, non adhibuerint. Sed haec clarius ex prop. 7. patebunt.

Beweis von Satz I, Variante

Sit triangulum ABC fig. l. et 2. per cujus tres angulos transeant rectae parallelae interminatae, sive quantum satis est productae, AD, BE, CF. Duarum ex his (pro arbitrio assumtarum) BE, CF intervallum (seu distantia minima) sit CE[6], tertia ipsis parallela AD, quae occurrit triangulo in angulo A: latus huic angulo oppositum est CB, quod productum, si opus est, occurrit ipsi AD (etiam productae quantum opus,) in puncto G. Occurrit, inquam, quod sic probo[7]: Si AD ipsi BC, producta productae, non occurrit, erunt parallelae: ipsi autem AD, parallelae sunt EB, FC, ergo et hae ipsi BC parallelae erunt; ergo eam non secabunt in punctis B, vel C. contra hypothesin. Occurrunt ergo sibi AD et BC in puncto G.

His positis, ajo triangulum ABC rectanguli sub AG et CE, sive rectanguli MNF (posita MN aequ. CE, et NF aequ. AG) dimidium esse. Ex puncto A ad rectam BC productam si opus est ducatur perpendicularis AH: manifestum est triangulum ABC rectanguli sub AH altitudine et BC basi dimidium esse, quare et rectanguli sub AG et CE dimidium erit, si ostendamus rectangulo sub AH et BC aequari rectangulum sub AG et CE. Id vero ita constabit: tres parallelae, AD, BE, CF ad ipsam BC angulum faciunt vel rectum vel obliquum. Si rectum, erit angulus CBE, item AGH, rectus; et coincidet punctum B cum puncto E, ac punctum H cum puncto G, ergo et rectangulum sub AG et CE, rectangulo sub AH et CB. Sin angulus quem parallelae faciunt ad ipsam BC, sit obliquus, habebimus duo triangula rectangula, AHG et CEB, ergo anguli in ipsis, praeter rectum, ut AGH, CBE, acuti sunt. Porro hi duo anguli efficiuntur ab eadem recta, (latere scilicet BC producto si opus,) ad duas parallelas AG, EB; duo autem anguli acuti ab eadem recta ad duas parallelas facti, aequales sunt. Ergo anguli HGA,

[5] Siehe [Cavalieri 1635], mit den *alii doctissimi viri* dürfte Leibniz unter anderem auf Roberval anspielen.

[6] Abstand CE $\neq 0$

[7] Es wird also die Existenz eines Schnittpunktes bewiesen, der für die spätere Konstruktion der Treppenfigur notwendig ist.

allelogramme zu teilen pflegen, eine allgemeine Auflösung in Dreiecke allerdings, soweit ich weiß, nicht angewendet haben. Aber diese Dinge werden sich deutlicher von Satz 7 her zeigen.

Beweis von Satz I, Variante

ABC, Fig. 1 und 2, sei ein Dreieck, durch dessen drei Winkel parallele Geraden AD, BE, CF gehen mögen, die unbegrenzt bzw. soweit verlängert sind, wie es hinreichend ist. CE sei das Intervall (bzw. der kleinste Abstand) der zwei (nach Belieben angenommenen) BE, CF von diesen, die zu ihnen parallele dritte sei AD, die das Dreieck im Punkt A trifft; die diesem Winkel gegenüberliegende Seite ist CB, die verlängert, wenn es nötig ist, AD (auch soweit verlängert, wie es nötig ist) im Punkt G trifft. Sie trifft, sage ich, was ich so beweise: Wenn AD BC, die verlängerte die verlängerte, nicht trifft, werden sie parallel sein. Aber zu AD sind EB, FC parallel, also werden auch diese zu BC parallel sein. Also werden sie die [Gerade BC] in den Punkten B oder C nicht schneiden, entgegen der Voraussetzung. Es treffen sich also AD und BC in einem Punkt G.

Unter dieser Voraussetzung behaupte ich, dass das Dreieck ABC die Hälfte des Rechtecks unter AG und CE bzw. des Rechtecks MNF ist (vorausgesetzt MN = CE und NF = AG). Vom Punkt A werde zur notfalls verlängerten Geraden BC die Senkrechte AH gezogen. Offenbar ist das Dreieck ABC die Hälfte des Rechtecks unter der Höhe AH und der Grundlinie BC, weshalb es auch die Hälfte des Rechtecks unter AG und CE sein wird, wenn wir zeigen, dass dem Rechteck unter AH und BC das Rechteck unter AG und CE gleich ist. Das wird aber auf folgende Weise feststehen: Die drei Parallelen AD, BE, CF bilden mit BC entweder einen rechten oder einen schiefen Winkel. Wenn einen rechten, wird der Winkel CBE, ebenso AGH, ein rechter sein, und es wird der Punkt B mit dem Punkt E und der Punkt H mit dem Punkt G zusammenfallen, also auch das Rechteck unter AG und CE mit dem Rechteck unter AH und CB. Wenn aber der Winkel, den die Parallelen mit BC bilden, ein schiefer sein sollte, werden wir zwei rechtwinklige Dreiecke, AHG und CEB, haben; also sind die Winkel in ihnen, außer dem rechten, wie AGH, CBE spitze. Ferner werden diese zwei Winkel von derselben Geraden (nämlich der notfalls verlängerten Seite BC) an den zwei Parallelen AG, EB erzeugt. Aber zwei spitze Winkel, die von derselben Geraden an zwei Parallelen gebildet sind, sind gleich. Also

EBC aequales sunt. Ergo triangula rectangula AHG, CEB sunt similia; eritque CE ad AH, ut CB ad AG, id est rectangulum CE in AG rectangulo AH in CB aequale erit. Rectanguli autem AH in CB, dimidium est triangulum ABC, ut diximus, et patet, ergo triangulum ABC etiam rectanguli CE in AG sive rectanguli MNF dimidium erit. Quod asserebatur.

Scholium von Satz I, Variante

Idem ad alia quoque theoremata Geometrica condenda, aut problemata non vulgaria resolvenda utile comperi, quale hoc est: invenire summam compositam ex areis omnium triangulorum super eadem basi constitutorum, verticesque habentium in punctis, quibus circuli concentrici quotcunque, rectas interminatas quotcunque in eodem circulorum centro concurrentes, secant. Quorum sexcentis facillime rectangulum aequale exhibebimus: Ut si invenienda sit summa triangulorum (fig. 3.) $_1BC$, $_2BC$, $_3BC$, $_4BC$, etc. usque ad $_{16}BC$ quod ope lemmatis nostri nullo negotio invenietur. Idem est, si eadem semper servata basi, vertices sint in intersectionibus parallelarum quotcunque, occurrentium parallelis quotcunque, et summa quaeratur triangulorum (fig. 4.) $_1BC$, $_2BC$, $_3BC$ etc. usque ad $_9BC$. Quae velut ab hoc loco aliena, ut verbis parcam, explicare, tunc supersedeo.

PROPOSITIO II.

> Series differentiarum[8] inter quantitates ordine perturbato dispositas, major est serie differentiarum inter quantitates easdem ordine naturali aut minus perturbato collocatas.

Ordinem naturalem voco, cum proceditur a minori ad majus tantum, vel a majori ad minus tantum: perturbatum cum modo ascenditur a minori ad majus, modo descenditur a majori ad minus.

Sint ordine naturali dispositae

[8] Leibniz denkt Differenzen geometrisch als Strecken zwischen zwei Punkten auf der Gerade oder in der Ebene. Deshalb sind hier Differenzen, wie im Scholium zu Satz 5 noch einmal betont wird, Absolutbeträge. Zu Einführung und Umgang mit reellen Zahlen im späteren 17. Jh. siehe [Whiteside 1960-1961, 188ff].

sind die Winkel HGA, EBC gleich. Also sind die rechtwinkligen Dreiecke AHG, CEB ähnlich; und CE wird sich zu AH wie CB zu AG verhalten, d.h., das Rechteck CE · AG wird gleich dem Rechteck AH · CB sein. Die Hälfte des Rechtecks AH · CB aber ist das Dreieck ABC, wie wir sagten und klar ist. Also wird das Dreieck ABC auch vom Rechteck CE · AG bzw. vom Rechteck MNF die Hälfte sein. Das wurde behauptet.

Scholium von Satz I, Variante

Dasselbe [Lemma] habe ich für das Aufstellen auch anderer geometrischer Theoreme oder für das Lösen nicht gewöhnlicher Aufgaben als nützlich erfahren. Eine derartige ist die folgende: das Auffinden der Summe, die aus den Flächeninhalten aller Dreiecke zusammengesetzt ist, die über derselben Grundlinie errichtet sind und Ecken in den Punkten haben, in denen beliebig viele konzentrische Kreise beliebig viele unbegrenzte Geraden schneiden, die in demselben Zentrum der Kreise zusammenlaufen. Wir werden sehr leicht ein Rechteck darstellen, das sechshundert von diesen gleich ist. Wenn z.B. die Summe der Dreiecke (Fig. 3) $_1BC$, $_2BC$, $_3BC$, $_4BC$, etc. bis zu $_{16}BC$ gefunden werden soll, wird dieses mit Hilfe unseres Lemmas mühelos gefunden werden. Dasselbe ist der Fall, wenn unter ständiger Beibehaltung derselben Grundlinie die Ecken auf den Schnittpunkten beliebig vieler Parallelen liegen, die beliebig viele Parallelen treffen, und die Summe der Dreiecke (Fig. 4) $_1BC$, $_2BC$, $_3BC$ bis zu $_9BC$ gesucht wird. Ich erspare es mir dann, um mich kurz zu fassen, diese gleichsam hierher nicht gehörenden Dinge zu erklären.

Satz II.

> Eine Reihe von Differenzen zwischen Quantitäten, die sich in gestörter Ordnung befinden, ist größer, als eine Reihe von Differenzen zwischen denselben Quantitäten, die in natürlicher oder weniger gestörter Ordnung vorliegen.

Eine Ordnung nenne ich natürlich, wenn man nur vom Kleineren zum Größeren fortschreitet oder nur vom Größeren zum Kleineren, gestört, wenn man mal aufsteigt vom Kleineren zum Größeren, mal absteigt vom Größeren zum Kleineren.

Es mögen sich in natürlicher Ordnung befinden

Quantitates A A + B A + B + C
Differentiae B C
Summa differentiarum, seu tota differentiarum series est, B + C. Sint rursus ordine perturbato dispositae
Quantitates A + B A A + B + C
Differentiae B B + C

Summa seu series harum differentiarum, 2B + C major utique quam B + C series prior. Idemque in serie longiore saepius perturbata, saepius fiet. Ergo generaliter summa differentiarum in ordine perturbato major quam in naturali, aut minus, sive rarius, perturbato. Quod asserebatur.

PROPOSITIO III.

> In serie quotcunque quantitatum, differentia extremarum non potest esse major quam summa differentiarum intermediarum sive continuarum.[9]

Sint quantitates A B C D E A E
Differentiae f g h l m
Differentiae scilicet continuae inter A et B, B et C, C et D, etc. sint f. g. h. etc. At differentia extremarum A et E, sit m. Ajo m non esse majorem quam f + g + h + l.

(1) Nam termini, sive quantitates A. B. C. D. E. vel ordine naturali collocantur, vel perturbato. Si naturali, tunc constat m esse aequalem summae f + g + h + l. Nam si alterutra extremarum, ut A, posita sit minima, altera, ut E, maxima, tunc erit
series A B C D E
eadem isti A A + f A + f + g A + f + g + h A + f + g + h + l
et differentia inter A et E, nempe m, erit f + g + h + l. Eodem modo licet ratiocinari si E sit minor quam A, et D minor quam C[i], etc. tantum enim

[i] *geändert aus*: E sit major quam A, et D major quam C

[9] In der *Historia et origo calculi differentialis* schildert Leibniz, wie er durch die Beschäftigung mit dem Prinzip der Identität, A = A oder A − A = 0, zu diesem „Differenzprinzip“ geführt wurde [LMG V, 395f]: Aus A − A + B − B + C − C + D − D + E − E = 0 folgt nach Umgruppierung (B − A) + (C − B) + (D − C) + (E − D) = E − A. Die Summe beliebig vieler Differenzen ist bei einer Reihe in natürlicher Ordnung also gleich der Differenz zwischen dem letzten und dem ersten Term [siehe auch LSB VII 3, 95]. Für Reihen in gestörter Ordnung wird aus dieser Gleichung eine Ungleichung.

die Quantitäten A A + B A + B + C
die Differenzen B C
Die Summe der Differenzen bzw. die ganze Reihe der Differenzen ist B + C. Es mögen sich andererseits in gestörter Ordnung befinden
die Quantitäten A + B A A + B + C
die Differenzen B B + C

Die Summe bzw. die Reihe dieser Differenzen 2B + C ist jedenfalls größer als die erste Reihe B + C. Und dasselbe wird öfter in einer längeren, öfter gestörten Reihe geschehen. Also ist allgemein die Summe der Differenzen in einer gestörten Ordnung größer als in einer natürlichen oder in einer weniger bzw. seltener gestörten. Das wurde behauptet.

Satz III.

> In einer Reihe beliebig vieler Quantitäten kann die Differenz der äußersten nicht größer sein als die Summe der dazwischenliegenden bzw. unmittelbar aufeinander folgenden Differenzen.

Die Quantitäten seien A B C D E A E
die Differenzen f g h l m
Die unmittelbar aufeinander folgenden Differenzen zwischen A und B, B und C, C und D etc., seien nämlich f, g, h, etc. Aber die Differenz der äußersten A und E sei m. Ich behaupte, dass m nicht größer ist als f + g + h + l.

(1) Denn die Terme bzw. Quantitäten A, B, C, D, E befinden sich entweder in natürlicher oder in gestörter Ordnung. Wenn in einer natürlichen, dann steht fest, dass m gleich der Summe f + g + h + l ist. Wenn nämlich die eine der beiden äußersten, wie A, als kleinste vorausgesetzt ist, die andere, wie E, als größte, dann wird die Reihe
A B C D E
dieselbe sein wie jene:
A A + f A + f + g A + f + g + h A + f + g + h + l,
und die Differenz zwischen A und E, nämlich m, wird f + g + h + l sein. Auf dieselbe Art kann man rechnen, wenn E kleiner ist als A und D kleiner als C etc.; man braucht nämlich die Reihe nur umzudrehen bzw. die Großbuchstaben zu vertauschen. In jedem der beiden Fälle

seriem invertere, sive literas capitales mutare opus est. Utroque ergo casu in ordine naturali, m, differentia inter A et E terminos maximum et minimum idem valebit quod f + g + h + l, summa differentiarum intermediarum sive continuarum; non est ergo m major quam haec summa.

(2) At si ordo quantitatum A. B. C. D. E. sit pertubatus, tunc major est series differentiarum, f + g + h + l, quam si esset naturalis, per prop. 2. major ergo quam differentia termini maximi et minimi, quia ut ostendimus artic. 1. hujus prop. ea differentia aequatur seriei differentiarum ordinis naturalis.

(3) Quoniam autem in casu situs perturbati summa differentiarum intermediarum, f + g + h + l. major est quam differentia terminorum duorum, qui inter hos A. B. C. D. E. maximi et minimi sunt, per artic. 2. erit et major quam differentia duorum aliorum, (quippe minus differentium, quam maximus et minimus), ergo generaliter erit major quam differentia duorum quorumcunque hujus seriei terminorum, ergo et major quam differentia inter A et E, seu major quam m. Ergo m minor erit quam f + g + h + l. Cum ergo in casu ordinis naturalis m sit huic summae aequalis per artic. 1. in casu ordinis perturbati minor, ut hic ostendimus; neutro casu major erit. Quod ostendendum sumseramus.

Scholium

Hae duae propositiones, 2. et 3. generalius conceptae sunt, quam necesse erat ad institutum nostrum, neque enim ad propositiones sequentes opus habebam nisi casu trium quantitatum: A. B. C.[10] malui tamen generaliter potius enuntiare et demonstrare; praesertim cum usque adeo universales sint, ut nullam omnino quantitatum varietatem morentur.

PROPOSITIO IV.

> Differentia duarum quantitatum non potest esse major quam summa differentiarum tertiae a singulis.[11]

[10] Im 5. Absatz des Beweises von Satz 6 wird das „Differenzprinzip“ von Satz 3 tatsächlich im Fall von mehr als drei Quantitäten benutzt werden.

[11] Dies ist die Dreiecksungleichung $|E - A| \leq |C - A| + |E - C|$ für reelle Zahlen A, C und E

wird also in der natürlichen Ordnung m, die Differenz zwischen den Termen A und E, dem kleinsten und größten, dasselbe ergeben wie f + g + h + l, die Summe der dazwischenliegenden bzw. unmittelbar aufeinander folgenden Differenzen; also ist m nicht größer als diese Summe.

(2) Aber wenn die Ordnung der Quantitäten A, B, C, D, E gestört ist, dann ist die Reihe der Differenzen f + g + h + l größer, als wenn sie eine natürliche wäre, nach Satz 2, also größer als die Differenz zwischen dem größten und kleinsten Term, weil, wie wir in Absatz 1 dieses Satzes gezeigt haben, diese Differenz gleich der Reihe der Differenzen in der natürlichen Ordnung ist.

(3) Da nun aber im Fall der gestörten Stellung die Summe der dazwischenliegenden Differenzen f + g + h + l größer ist als die Differenz der beiden Terme, die unter diesen A, B, C, D, E die größten und kleinsten sind, wird sie nach Absatz 2 auch größer sein als die Differenz zwischen zwei anderen, (die sich natürlich weniger unterscheiden als der größte und kleinste Term), also wird sie allgemein größer sein als die Differenz zwischen zwei beliebigen Termen dieser Reihe, also auch größer als die Differenz zwischen A und E bzw. größer als m. Also wird m kleiner sein als f + g + h + l. Weil also im Fall der natürlichen Ordnung m gleich dieser Summe ist nach Absatz 1, im Fall der gestörten Ordnung kleiner, wie wir hier gezeigt haben, wird sie in keinem der beiden Fälle größer sein. Dieses zu zeigen hatten wir uns vorgenommen.

Scholium

Diese beiden Sätze, 2 und 3, sind allgemeiner gefasst worden, als es für unser Vorhaben notwendig war. Denn ich benötigte für die folgenden Sätze nur den Fall dreier Quantitäten A, B, C. Trotzdem wollte ich sie lieber allgemein aussprechen und beweisen, vor allem, weil sie dermaßen umfassend sind, dass sie sich an keiner noch so großen Verschiedenheit der Quantitäten stoßen.

Satz IV.

> Die Differenz zweier Quantitäten kann nicht größer sein als die Summe der Differenzen zwischen einer dritten und jeder einzelnen.

Nempe sint duae quantitates A. E. quarum differentia f: Sit alia C, et differentia inter A et C sit b. inter E et C sit d. ajo f non posse excedere b + d. Reducantur in unam seriem:

Quantitates	A	C	E		A	E
Differentiae		b	d		f	

Ergo per prop. praeced. ipsa f differentia extremarum, non potest esse major quam summa differentiarum intermediarum seu continuarum, sive quam b + d. Quod ostendendum erat.

PROPOSITIO V.

> Differentia duarum quantitatum minor est quam summa duarum aliarum quantitatum, quarum una unius, altera alterius priorum differentiam a tertia excedit.

Schema ita stabit [:]

Quantitates	A	C	E	Ergo ipsarum	A		E
Differentiae verae	b		d	differentia vera		f	
minores quam		g	h	minor quam	g	+ h	

Nimirum ajo f differentiam quantitatum duarum A. E. minorem esse quam g + h, summam duarum aliarum quantitatum, g. h. si g excedat b. differentiam ipsius A a tertia C, et h, excedat, d, differentiam ipsius E ab eadem tertia C. Nam g est major quam b, et h major quam d ex hypothesi, ergo g + h est major quam b + d, at f non est major quam b + d per prop. 4. Ergo f est minor quam g + h.

Scholium

Has propositiones quartam et quintam, etsi valde claras attente consideranti adjiciendas duxi tamen, tum quod servient ad facilem admodum per sola polygona inscripta sine circumscriptis demonstrationem apagogicam qua prop. 7. utar, tum quod operae pretium videatur ipsius per se differentiae proprietates considerare, quatenus ab excessu vel defectu

Es seien nämlich die zwei Quantitäten A, E, deren Differenz f. Eine andere sei C, und die Differenz zwischen A und C sei b, zwischen E und C sei d. Ich behaupte, dass f nicht b + d übertreffen kann.
Es seien wieder in eine Reihe gebracht:

die Quantitäten	A	C	E		A	E
die Differenzen		b	d		f	

Nach dem vorhergehenden Satz kann also die Differenz f zwischen den äußersten Quantitäten nicht größer sein als die Summe der dazwischenliegenden bzw. unmittelbar aufeinander folgenden Differenzen oder als b + d. Das war zu zeigen.

Satz V.

> Die Differenz zwischen zwei Quantitäten ist kleiner als die Summe zweier anderer Quantitäten, von denen die eine die Differenz zwischen der einen, die andere die Differenz zwischen der anderen von den ersteren und einer dritten übertrifft.

Das Schema wird so dastehen:

Quantitäten	A	C	E	Also von	A		E
wahre Differenzen	b		d	wahre Differenz		f	
kleiner als		g	h	kleiner als	g	+ h	

Allerdings behaupte ich, dass die Differenz f zwischen den beiden Quantitäten A und E kleiner ist als g + h, die Summen der beiden anderen Quantitäten g und h, wenn g b, die Differenz zwischen A und einer dritten C, übertrifft, und h d, die Differenz zwischen E und derselben dritten C übertrifft. Aufgrund der Voraussetzung ist nämlich g größer als b und h größer als d, also ist g + h größer als b + d, aber nach Satz 4 ist f nicht größer als b + d. Also ist f kleiner als g + h.

Scholium

Diese Sätze, den vierten und fünften, auch wenn sie dem aufmerksamen Betrachter sehr klar sind, glaubte ich dennoch hinzufügen zu müssen, teils, weil sie zum äußerst bequemen indirekten Beweis, den ich in Satz 7 benutzen werde, durch einbeschriebene Polygone allein ohne umbeschriebene dienen werden, teils, weil es der Mühe wert erscheinen mag, die Eigenschaften der Differenz an sich insofern zu betrachten, als vom Überschuss animo abstrahitur; cum scilicet non exprimitur quaenam ex differentibus quantitatibus altera major minorve sit.

PROPOSITIO VI.

[Hujus propositionis lectio omitti potest, si quis in demonstranda prop. 7. summum rigorem non desideret. Ac satius erit eam praeteriri ab initio, reque tota intellecta tum demum legi, ne ejus scrupulositas fatigatam immature mentem a reliquis, longe amoenioribus, absterreat. Hoc unum enim tantum conficit duo spatia, quorum unum in alterum desinit si in infinitum inscribendo progrediare; etiam numero inscriptionum manente finito tantum, ad differentiam assignata quavis minorem sibi appropinquare. Quod plerumque etiam illi sumere pro confesso solent, qui severas demonstrationes afferre profitentur.]

Si a quolibet curvae cujusdam propositae 1C 2C etc. 4C (fig. 3.) puncto C. ad unum anguli cujusdam recti TAB in eodem cum ipsa plano positi, latus A 1B 2B etc. 4B. velut ad axem, ducantur ordinatae normales C B ad alterum latus A 1T 2T etc. 4T. tangentes CT et ex punctis occursus tangentium, T, agantur perpendiculares TD ad ordinatas respondentes et curva nova 1D 2D etc. 4D. per intersectiones harum perpendicularium et ordinatarum transeat.[12] Rursus si quaelibet in curva priore designata puncta proxima, ut 1C et 2C vel etc. vel 3C et 4C, aliave quotcunque inter haec prima et ultima paria interjecta, rectis inscriptis sive chordis 1C 2C, etc. usque ad 3C 4C jungantur, quae productae CM eidem, cui tangentes anguli illius recti TAB. lateri AT. occurrant in punctis M. quae cadunt intra puncta T, ut 1M inter 1T et 2T, et 3M inter 3T et 4T. et ex his occursuum punctis M similiter perpendiculares 1M 1N 1P, aliaeque, usque ad 3M 3N 3P demittantur, quarum una quaelibet duorum punctorum ad M pertinentium ordinatis occurrat, ut 1M 1N 1P. (cujus punctum 1M, pertinet ad puncta curvae 1C. 2C.) occurrere debet, ordinatae 1C 1B in puncto 1N, et ordinatae 2C 2B in puncto 1P. idemque

[12] Diese Konstruktion der Resektenfigur D wird in der Definition in Anschluss an Satz 7 sowie Figur 3 genauer ausgeführt. Für den Beweis von Satz 6 können die Einzelheiten der Konstruktion übergangen werden, da von den Eigenschaften der neuen Kurve D nur die Monotonie über dem beschränkten Intervall 1B und 4B sowie die Existenz von Kurvenpunkten iF zwischen iD und (i+1)D verwendet wird. Leibniz zeigt, dass dann die vierlinige Fläche 1D 1B 4B 4D zwischen der Kurve und diesem Intervall mit einer geradlinige Treppenfigur durch diese iF nach Verringerung der maximalen Höhen iB (i+1)B beliebig genau approximiert werden kann.

und Mangel gedanklich abgesehen wird; d.h. wenn nicht ausgedrückt wird, welche der zwei sich unterscheidenden Quantitäten denn größer oder kleiner sei.

Satz VI.

[Die Lektüre dieses Satzes kann ausgelassen werden, wenn man bei dem zu beweisenden Satz 7 keine größte Strenge verlangt. Und es wird besser sein, dass er zunächst übergangen und dann erst gelesen wird, wenn die ganze Sache verstanden worden ist, damit seine Übergenauigkeit den vorzeitig ermüdeten Geist nicht von den übrigen, bei weitem reizvolleren Dingen abschreckt. Dieses eine nämlich nur bewirkt er, dass zwei Flächen, von denen eine in die andere übergeht, wenn man bis ins Unendliche mit dem Einbeschreiben fortschreitet, sich einander nähern bis auf eine Differenz, die kleiner ist als eine beliebige zugewiesene, selbst wenn die Anzahl der Einschreibungen nur endlich bleibt. Dies pflegen auch meistens jene für anerkannt zu halten, die versprechen, strenge Beweise vorzubringen.]

Wenn von einem beliebigen Punkt C einer gewissen vorgegebenen Kurve 1C 2C etc. 4C (Fig. 3) zur einen Seite A 1B 2B etc. 4B, gleichsam zur Achse, eines gewissen in derselben Ebene wie sie gelegenen rechten Winkels TAB senkrechte Ordinaten C B, zur anderen Seite A 1T 2T etc. 4T Tangenten CT gezogen werden, und von den Treffpunkten T der Tangenten Lote TD zu den entsprechenden Ordinaten geführt werden und eine neue Kurve 1D 2D etc. 4D durch die Schnitte dieser Lote und Ordinaten geht; wenn andererseits beliebige auf der ersten Kurve bezeichnete nebeneinander liegende Punkte wie 1C und 2C oder etc. oder 3C und 4C oder andere, wie viele auch immer zwischen diesem ersten und letzten Paar liegen, durch einbeschriebene Geraden bzw. Sehnen 1C 2C etc. bis zu 3C 4C verbunden werden, die als Verlängerungen CM wie die Tangenten dieselbe Seite AT jenes rechten Winkels TAB in den Punkten M treffen, die zwischen die Punkte T wie 1M zwischen 1T und 2T und 3M zwischen 3T und 4T fallen, und wenn von diesen Treffpunkten M in ähnlicher Weise Lote 1M 1N 1P und andere bis 3M 3N 3P gefällt werden, von denen ein beliebiges die Ordinaten der zwei sich auf M beziehenden Punkte trifft, wie 1M 1N 1P (dessen Punkt 1M sich auf die Kurvenpunkte 1C, 2C bezieht) die Ordinate 1C 1B im Punkt 1N treffen soll und die Ordinate 2C 2B im Punkt 1P, und dasselbe in den übrigen Punkten geschehen soll, weshalb diese Lote von in caeteris fieri debet; unde hae perpendiculares ab ordinatis abscindent portiones quasdam inde ab axe sumtas, ut 1N 1B, aliasve[i] usque ad 3B 3N.

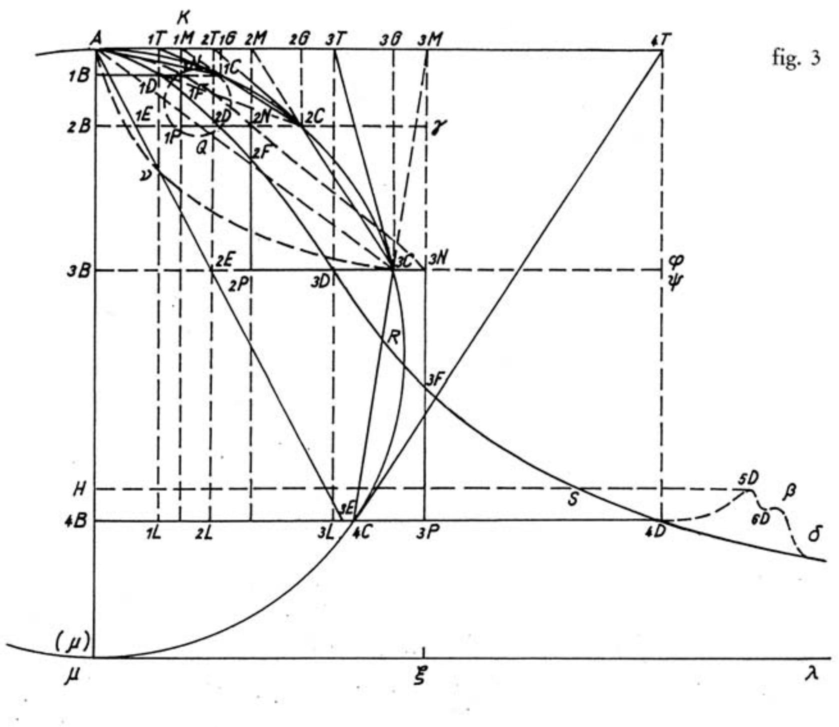


fig. 3

His ita praescriptis ac praeparatis, ajo in curvis puncta C inter 1C et 4C et puncta D inter 1D et 4D tam sibi vicina tantoque numero assumta intelligi posse, ut spatium rectilineum gradiforme 1N 1B 4B 3P 3N 2P 2N 1P 1N compositum ex rectangulis 1N 1B 2B 1P, aliisque usque ad 3N 3B 4B 3P quae sub ordinatarum si opus est productarum rescissis portionibus 1B 1N, aliisve usque ad 3B 3N, et sub intervallis 1B 2B, aliisve, usque ad 3B 4B. comprehenduntur;

ab ipso spatio quadrilineo 1D 1B 4B 4D 3D etc. 1D (axe 1B 4B, ordinatis extremis 1B 1D, 4B 4D et curva nova 1D 2D etc. 4D comprehenso) differat quantitate minore quavis data. Et eadem demonstratio locum habet in

[i] *geändert aus*: aliave

den Ordinaten gewisse Teile abschneiden werden, die von dort von der Achse ab genommen sind, wie 1N 1B oder eine andere bis 3B 3N.

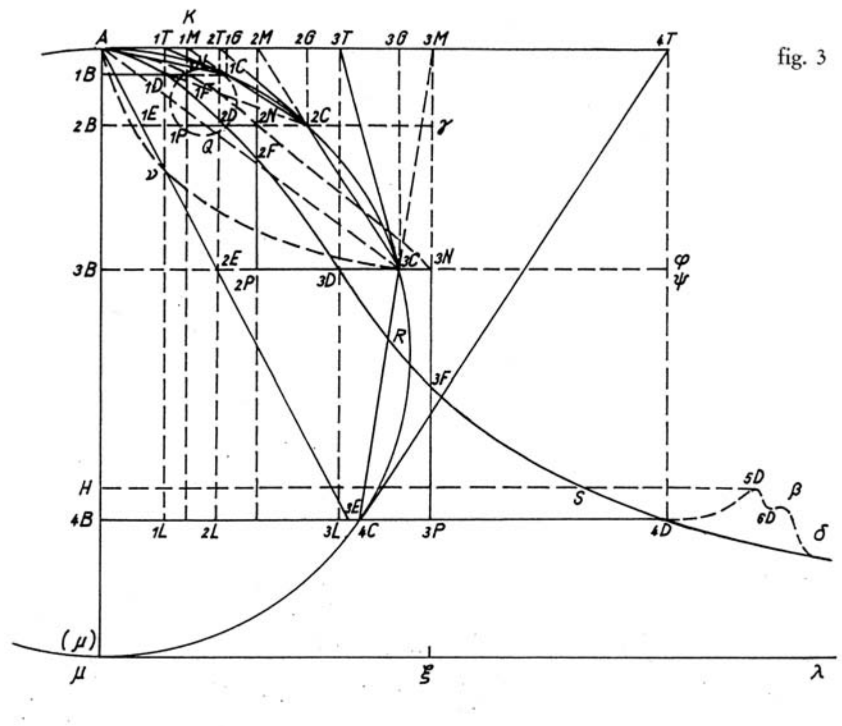


fig. 3

Nachdem dieses so vorgeschrieben und vorbereitet worden ist, behaupte ich, dass auf den Kurven Punkte C zwischen 1C und 4C und Punkte D zwischen 1D und 4D einander so nahe und in so großer Anzahl angenommen gedacht werden können, dass die geradlinige treppenförmige Fläche 1N 1B 4B 3P 3N 2P 2N 1P 1N, die aus den Rechtecken 1N 1B 2B 1P und anderen bis 3N 3B 4B 3P zusammengesetzt ist, die unter den abgeschnittenen Teilen 1B 1N der notfalls verlängerten Ordinaten oder anderen bis 3B 3N und den Intervallen 1B 2B oder anderen bis 3B 4B umschlossen werden,

sich von der vierlinigen Fläche 1D 1B 4B 4D 3D etc. 1D selbst (die von der Achse 1B 4B, den äußersten Ordinaten 1B 1D, 4B 4D und der neuen Kurve 1D 2D etc. 4D umschlossen ist) um eine Quantität unterscheidet, die kleiner ist als eine beliebige gegebene. Und derselbe Beweis hat seine quovis alio spatio mixtilineo et gradiformi continua rectarum ad quendam axem applicatione [formato]. Adeoque methodus indivisibilium, quae per summas linearum[13] invenit areas spatiorum, pro demonstrata haberi potest. Requiritur autem curvas aut saltem partes in quas sunt sectae, esse ad easdem partes cavas, et carere punctis reversionum.

Definitio

Puncta Reversionum voco, in quibus coincidunt ordinata et tangens, seu ex quibus ordinata ad axem ducta curvam tangit: talia sunt, in curva 1D 2D etc. 4D 5D 6D, puncta 4D 5D 6D. quia in illis curva cum antea descenderet ab A versus 4B, nunc rursus ascendit versus A vel contra. Quae differunt a punctis flexuum contrariorum, quale est R, in quo tantum curva ex concava fit convexa, et contra atque ita non est ad easdem partes cava.

Porro Puncta Reversionum in areis spatiorum per summas rectarum ordinatarum inveniendis ideo nocent; quia ita fit, ut diversae ordinatae ejusdam curvae, ut HS, H 5D inter se, saltem ex parte, coincidant. Huic malo remedium est, ut tota curva in tot dividatur portiones, quot habet puncta reversionum, hoc pacto singulae portiones, ut 1D 2D etc. 4D. et 4D 5D, et 5D 6D, nulla habebunt reversionum puncta inter extrema sua interjecta; et in singulis locum habebit nostra propositio.

Caeterum, ut obiter dicam, ex his patet curvam eandem habere aut non habere puncta reversionum prout ad diversos axes refertur: quod secus est in punctis flexuum contrariorum.[14]

Demonstratio propositionis VI.

(1) Punctum 1M positum est inter puncta 1T. 2T. ex constructione. Ergo et recta 1M 1N 1P cadit inter rectas 1T 1D, 2T 2D, seu recta 1N 1P de parallela 1B 1N ad parallelam 2B 2D perveniens cadet intra duo puncta

[13] Der Begriff verweist auf Pascal, siehe Anmerkung 35, S. 25.

[14] Leibniz ist sich also bewusst, dass die Krümmung im Gegensatz zur Steigung eine intrinsische Qualität der Kurve, d.h. unabhängig von der Wahl der Achsen, ist.

Gültigkeit bei jeder beliebigen anderen gemischtlinigen und treppenförmigen Fläche, die durch fortlaufende Anlegung von Geraden an eine gewisse Achse gebildet wird. Und deshalb kann die Indivisibelnmethode, die durch Summen von Linien die Flächeninhalte ermittelt, für bewiesen gehalten werden. Es ist aber erforderlich, dass die Kurven oder wenigstens die Teile, in die sie zerschnitten sind, zu denselben Seiten hin gewölbt sind und keine Reversionspunkte haben.

Definition

Reversionspunkte nenne ich diejenigen, in denen die Ordinate und Tangente zusammenfallen bzw. die von ihnen zur Achse gezogene Ordinate die Kurve berührt: Derartige sind auf der Kurve 1D 2D etc. 4D 5D 6D die Punkte 4D 5D 6D, weil bei jenen die Kurve, während sie vorher von A in Richtung 4B abstieg, nun dagegen in Richtung A aufsteigt oder umgekehrt. Diese unterscheiden sich von den Wendepunkten, wie R einer ist, in dem nur aus einer konkaven Kurve eine konvexe wird und umgekehrt, und auf diese Weise nicht zu derselben Seite hin gewölbt ist.

Ferner sind Reversionspunkte bei der Ermittlung der Flächeninhalte durch Summen von geraden Ordinaten deshalb hinderlich, weil es so dazu kommt, dass verschiedene Ordinaten derselben Kurve, wie HS, H 5D, wenigstens teilweise, zusammenfallen. Gegen dieses Übel gibt es das Hilfsmittel, dass die Kurve in so viele Stücke geteilt wird, wie sie Reversionspunkte hat. Unter dieser Voraussetzung werden die einzelnen Stücke wie 1D 2D etc. 4D und 4D 5D und 5D 6D keine Reversionspunkte haben, die zwischen ihren äußersten Punkten liegen; und in den einzelnen Abschnitten wird unser Satz seine Gültigkeit haben.

Übrigens, um es nebenbei zu sagen, ist aus diesen Bemerkungen klar, dass dieselbe Kurve Reversionspunkte hat oder nicht hat, je nachdem, wie sie auf die verschiedenen Achsen bezogen wird; das ist anders bei den Wendepunkten.

Beweis von Satz 6

(1) Der Punkt 1M liegt nach der Konstruktion zwischen den Punkten 1T, 2T. Also fällt auch die Gerade 1M 1N 1P zwischen die Geraden 1T 1D und 2T 2D, bzw. die Gerade 1N 1P, die sich von der Parallelen 1B 1N zur Parallelen 2B 2D erstreckt, wird zwischen die zwei Punkte 1D, 2D fallen, die

in his diversis parallelis posita, 1D, 2D, ita ut a puncto 1D ad punctum 2D nulla possit duci linea, recta vel curva quin vel rectam 1N 1P secet alicubi in F, vel supra infrave duas parallelas 1B 1N, 2B 2D evagetur, adeoque modo ascendat, modo descendat, ut curva 1DQ 2D, descendens ab 1D ad Q et rursus ascendens a Q ad 2D. vel curva 1DK 2D, ascendens ab 1D ad K, et descendens a K ad 2D; quae adeo habebit puncta reversionum, Q vel K. Sed talia puncta non habet curva aut ejus portio 1D 2D, ex hypothesi; ergo rectam 1N 1P secabit in 1F. Eodem modo alia portio 2D 3D rectam 2N 2P secabit in 2F. etc.[15]

(2) Producta jam intelligatur 1T 1D, dum ordinatae sequenti 2B 2C occurrat in 1E. eodem mode 2T 2D 2E ordinatae sequenti 3B 2E 3C occurrat in 2E. His positis ajo primum ipso rectangulo quod vocabo complementale 1D 1E 2D. minorem esse differentiam inter unum Quadrilineum partiale 1D 1B 2B 2D 1D, et inter unum rectangulum ei respondens 1N 1B 2B 1P, quod quia cum caeteris similibus spatium gradiforme componit, vocabo Rectangulum Elementare, quibus vocabulis tantum in hujus propositionis demonstratione utar, ut compendiosius loqui liceat. Assertum ita probo: ab utroque differentium, Quadrilineo partiali et rectangulo elementari auferatur quod utrique commune est, scilicet (quoniam per artic. 1. aliquod intelligi potest punctum 1F,) Quinquelineum 1D 1B 2B 1P 1F 1D, quatuor rectis 1D 1B, et 1B 2B, et 2B 1P et 1P 1F, ac curva 1F 1D comprehensum: tunc residuorum, trilinei 2D 1P 1F 2D ex quadrilineo partiali; et trilinei 1D 1N 1F 1D ex rectangulo elementari remanentium, eadem utique differentia erit, quae ipsorum totorum differentium, Quadrilinei partialis, et rectanguli elementaris. Generaliter enim ea est differentia residuorum, quae totorum ex quibus sublata est quantitas communis.

(3) Suffecerit ergo ostendi differentiam horum duorum trilineorum minorem esse rectangulo complementali 1D 1E 2D, quod patet quia utrumque simul, distincte, trilineum scilicet 1D 1N 1F 1D et trilin. 2D 1P 1F 2D,

[15] Die konkrete Lage dieser Schnittpunkte ist in der Folge nicht von Belang. Der Beweis bleibt für beliebige Punkte iF gültig, solange diese auf der Kurve zwischen iD und (i+1)D liegen. Leibniz skizziert einen entsprechenden Beweis mit einbeschriebenen Rechtecken, also strikten „Untersummen", anhand der Kurve 1N 2N 3N unmittelbar anschließend.

auf diesen verschiedenen Parallelen liegen, so dass von Punkt 1D zum Punkt 2D keine gerade oder gekrümmte Linie gezogen werden kann, ohne dass sie entweder die Gerade 1N 1P irgendwo in F schneidet, oder oberhalb oder unterhalb die zwei Parallelen 1B 1N, 2B 2D überschreitet und deshalb mal aufsteigt, mal absteigt wie die Kurve 1DQ 2D, die von 1D nach Q hin absteigt und dagegen von Q nach 2D hin aufsteigt, oder die Kurve 1DK 2D, die von 1D nach K hin aufsteigt und von K nach 2D hin absteigt; deshalb wird sie Reversionspunkte haben, Q oder K. Aber derartige Punkte hat die Kurve oder ihr Teil 1D 2D nicht nach Voraussetzung; also wird sie die Gerade 1N 1P in 1F schneiden. In derselben Weise wird der andere Teil 2D 3D die Gerade 2N 2P in 2F schneiden etc.

(2) Nun denke man sich die Gerade 1T 1D verlängert, bis sie auf die folgende Ordinate 2B 2C in 1E trifft, und in derselben Weise treffe 2T 2D 2E auf die folgende Ordinate 3B 2E 3C in 2E. Unter diesen Voraussetzungen behaupte ich zuerst: Kleiner als das Rechteck 1D 1E 2D selbst, das ich komplementär nennen werde, ist die Differenz zwischen einer vierlinigen Teilfläche 1D 1B 2B 2D 1D und einem ihr entsprechenden Rechteck 1N 1B 2B 1P, das ich, weil es mit den übrigen ähnlichen Flächen eine treppenförmige Fläche bildet, elementares Rechteck nennen werde, – diese Bezeichnungen werde ich nur in dem Beweis dieses Satzes benutzen, damit man kürzer reden kann. Die Behauptung beweise ich folgendermaßen: von jeder der beiden sich unterscheidenden Flächen, der vierlinigen Teilfläche und dem elementaren Rechteck, wird abgezogen, was beiden gemeinsam ist, nämlich, (da man sich nach Absatz 1 irgendeinen Punkt 1F denken kann) die fünflinige Fläche 1D 1B 2B 1P 1F 1D, die von den vier Geraden 1D 1B und 1B 2B und 2B 1P und 1P 1F und der Kurve 1F 1D umfaßt wird; dann wird von den verbleibenden Resten, dem dreilinigen 2D 1P 1F 2D aus der vierlinigen Teilfläche und dem dreilinigen 1D 1N 1F 1D aus dem elementaren Rechteck, die Differenz auf jeden Fall dieselbe sein, wie die der sich unterscheidenden ganzen Flächen selbst, der vierlinigen Teilfläche und des elementaren Rechtecks. Allgemein ist nämlich diejenige die Differenz der Reste, welche es von den Ganzen ist, von denen die gemeinsame Quantität fortgenommen wurde.

(3) Es dürfte also ausreichen zu zeigen, dass die Differenz dieser zwei dreilinigen Flächen kleiner ist als das komplementäre Rechteck 1D 1E 2D, was offensichtlich ist, da jede der beiden zugleich, gesondert, d.h. die dreilinige 1D 1N 1F 1D und die dreilinige 2D 1P 1F 2D und deshalb auch de-

adeoque et summa eorum, intra rectangulum hoc complementale cadit: majus est ergo rectangulum complementale quam eorum summa, ergo et majus quam eorum differentia; quare et majus quam id quod per artic. 2. cum ea coincidit, differentia scilicet inter Quadrilineum partiale, et rectangulum ei respondens Elementare, quod primum probare susceperam.

(4) Eodem modo ut in artic. 3. probabitur Quadrilinei partialis sequentis, 2D 2B 3B 3D 2D, et rectanguli ei respondentis elementaris 2N 2B 3B differentiam minorem esse rectangulo sequenti complementali 2D 2E 3D, et ita si alia quotcunque sequantur vel interjiciantur. Itaque generaliter summa omnium differentiarum partialium, vel quod idem est differentia totorum, id est differentia summae Quadrilineorum partialium omnium, seu Quadrilinei totalis 1D 1B 4B 4D 3D etc. a summa omnium ejusmodi rectangulorum elementalium, seu a spatio rectilineo gradiformi 1N 1B 4B 3P 3N 2P 2N 1P 1N minor erit quam summa omnium rectangulorum complementalium 1D 1E 2D, aliorumve similium usque ad 3D 3E 4D.

(5) Haec rectangula quae complementalia vocavi, bases habent, 4D 3E, vel 3D 2E (id est 3E 2L); aliasve, usque ad 2D 1E, (id est 2L 1L). Summa autem harum basium aequatur ipsi [4D 1L[i]] seu (per prop. 3. artic. 1.) differentiae inter 1B 1D (vel 4B 1L), et 4B 4D, inter primam scilicet et novissimam ordinatarum ad curvam [1D 2D 3D 4D]. Quod eodem modo fieret, si quotcunque alia puncta ordinataeque interjicerentur. Itaque si jam ponamus horum rectangulorum complementalium 1D 1E 2D, 2D 2E 3D, aliorumque, altitudines, 1D 1E (vel 1B 2B) et 2D 2E (vel 2B 3B) usque ad 3D 3E (vel 3B 4B, vel ψ 4D), seu intervalla ordinatarum, aequari inter se, utique summa omnium rectangulorum complementalium aequalis erit rectangulo ψ 4D 1L ex summa basium 1L 4D in altitudinem communem ψ 4D (aequalem ipsi 3B 4B, et 2B 3B,) ducta: vel si inaequales sint altitudines, utique summa rectangulorum complementalium minor erit rectangulo sub summa basium in maximam altitudinum: Ponatur ergo altitudinum harum maxima, vel certe cuique caeterarum aequalis, esse ultima 3B 4B, utique summa horum rectangulorum complementalium minor erit vel certe aequalis summae basium, 4D 1L, ductae in altitudinem

[i] *geändert aus*: 4L

ren Summe innerhalb dieses komplementären Rechtecks liegt: Größer ist also das komplementäre Rechteck als deren Summe, also auch größer als ihre Differenz; aus diesem Grund auch größer als das, was nach Absatz 2 mit dieser übereinstimmt, nämlich die Differenz zwischen der vierlinigen Teilfläche und dem ihr entsprechenden elementaren Rechteck, was ich unternommen hatte zuerst zu beweisen.

(4) In derselben Weise wie in Absatz 3 wird bewiesen werden, dass die Differenz der folgenden vierlinigen Teilfläche 2D 2B 3B 3D 2D und des ihr entsprechenden elementaren Rechtecks 2N 2B 3B kleiner ist als das komplementäre Rechteck 2D 2E 3D, und ebenso, wenn andere, beliebig viele folgen oder dazwischen liegen. Es wird deshalb allgemein die Summe aller Teildifferenzen oder, was dasselbe ist, die Differenz der ganzen Flächen, d.h. die Differenz zwischen der Summe aller vierlinigen Teilflächen bzw. der vierlinigen gesamten Fläche 1D 1B 4B 4D 3D etc. und der Summe aller derartigen elementaren Rechtecke bzw. der geradlinigen treppenförmigen Fläche 1N 1B 4B 3P 3N 2P 2N 1P 1N kleiner sein als die Summe aller komplementären Rechtecke 1D 1E 2D oder anderer ähnlicher bis 3D 3E 4D.

(5) Diese Rechtecke, die ich komplementär genannt habe, haben die Grundlinien 4D 3E oder 3D 2E (d.h. 3E 2L) oder andere bis 2D 1E (d.h. 2L 1L). Aber die Summe dieser Grundlinien ist gleich 4D 1L bzw. (nach Satz 3 Absatz 1) der Differenz zwischen 1B 1D (oder 4B 1L) und 4B 4D, nämlich zwischen der ersten und letzten der Ordinaten an der Kurve 1D 2D 3D 4D. Dieses würde in derselben Weise geschehen, wenn beliebig viele andere Punkte und Ordinaten dazwischen lägen. Wenn wir nun demnach annehmen, dass von diesen komplementären Rechtecken 1D 1E 2D, 2D 2E 3D und den anderen die Höhen 1D 1E (oder 1B 2B) und 2D 2E (oder 2B 3B) bis 3D 3E (oder 3B 4B oder ψ 4D) bzw. die Intervalle der Ordinaten untereinander gleich sind, wird jedenfalls die Summe aller komplementären Rechtecke gleich sein dem Rechteck ψ 4D 1L aus der Summe der Grundlinien 1L 4D mal der gemeinsamen Höhe ψ 4D (die gleich 3B 4B und 2B 3B ist): oder wenn die Höhen ungleich sind, wird jedenfalls die Summe der komplementären Rechtecke kleiner sein als das Rechteck unter der Summe der Grundlinien mal der größten Höhe. Es möge also von diesen Höhen die letzte 3B 4B als größte oder aber gleich jeder der übrigen gesetzt werden, so wird jedenfalls die Summe dieser komplementären Rechtecke kleiner oder wenigstens gleich sein der mit der größten Höhe 3B 4B oder ψ 4D multiplizierten Summe 4D 1L

maximam 3B 4B vel ψ 4D seu rectangulo ψ 4D 1L.

(6) Quoniam differentia Quadrilinei totalis et spatii gradiformis minor est summa rectangulorum complementalium per artic. 4. et summa rectangulorum complementalium aequalis est vel minor rectangulo ψ 4D 1L per artic. 5. Ergo differentia Quadrilinei totalis et spatii gradiformis minor est rectangulo ψ 4D 1L.

(7) Porro hoc novissimarum ordinatarum, 3B 3D, 4B 4D, intervallum (nempe altitudo 3B 4B sive ψ 4D,) tametsi caeteris majus, aut certe non minus sit assumtum intervallis, tamen assignata quantitate minus assumi potest; nam ipso sumto utcunque parvo caetera sumi possunt adhuc minora. Posito ergo rectam ψ 4D assignata linea minorem sumi posse, (quoniam in nostra est potestate puncta 3D 4D, aliaque sumere utcunque sibi propinqua, et numero quantolibet,) sequetur et rectangulum ψ 4D 1L, altitudinem habens quae data recta minor sumi possit, etiam data aliqua superficie reddi posse minus. Sit enim data superficies, rectangulum βHA, si placet aliudve quodcunque: assumatur ei aequale vel minus rectangulum φ 4D 1L, super basi 4D 1L. Jam hac recta φ 4D minor sumatur ψ 4D, erit rectangulum ψ 4D 1L minus rectangulo φ 4D 1L, adeoque et spatio dato seu rectangulo βHA.

(8) His jam positis demonstratio ita absolvetur: differentia Quadrilinei totalis et spatii gradiformis minor est rectangulo ψ 4D 1L per artic. 6. Et puncta in curva tam exiguo intervallo tantoque numero assumi possunt, ut rectangulum ψ 4D 1L sit dato spatio minus per artic. 7. Ergo eadem opera etiam Differentia hujus Quadrilinei, (de quo et propositio loquitur) et spatii gradiformis data quantitate minor reddi potest. Q. E. D.

Haec propositio prolixiore indiguit demonstratione, quia non parum a communi indivisibilium methodo nostra in hoc quidem casu differt.[16] Si

[16] Der wesentliche Unterschied liegt darin, dass Leibniz mit Blick auf Satz 7 nicht die Fläche unter der ursprünglichen Kurve selbst, sondern diejenige unter der daraus abgeleiteten Resektenfigur durch treppenförmige Flächen approximiert.

der Grundlinien bzw. dem Rechteck ψ 4D 1L.

(6) Weil nun die Differenz zwischen der gesamten vierlinigen Fläche und der treppenförmigen Fläche kleiner ist als die Summe der komplementären Rechtecke nach Absatz 4 und die Summe der komplementären Rechtecke gleich oder kleiner ist als das Rechteck ψ 4D 1L nach Absatz 5, ist folglich die Differenz zwischen der gesamten vierlinigen Fläche und der treppenförmigen Fläche kleiner als das Rechteck ψ 4D 1L.

(7) Ferner kann dieses Intervall zwischen den letzten Ordinaten 3B 3D und 4B 4D (nämlich die Höhe 3B 4B bzw. ψ 4D), auch wenn es größer oder wenigstens nicht kleiner als die übrigen Intervalle angenommen ist, trotzdem kleiner angenommen werden als eine zugewiesene Quantität; denn die übrigen können noch kleiner gewählt werden als das wie klein auch immer gewählte selbst. Nimmt man also an, dass die Gerade ψ 4D kleiner gewählt werden kann als eine zugewiesene Linie (da es ja in unserer Macht steht, Punkte 3D 4D und andere wie nahe einander auch immer und in beliebig großer Anzahl zu wählen), so wird folgen, dass auch das Rechteck ψ 4D 1L mit einer Höhe, die kleiner gewählt werden kann als eine gegebene Gerade, sogar kleiner gemacht werden kann als irgendeine gegebene Oberfläche. Es sei nämlich eine Oberfläche gegeben, das Rechteck βHA, wenn es gefällt, oder irgendein beliebiges anderes: ihm gleich oder kleiner sei das Rechteck φ 4D 1L über der Basis 4D 1L angenommen. Nun werde ψ 4D kleiner als diese Gerade φ 4D gewählt, es wird das Rechteck ψ 4D 1L kleiner sein als das Rechteck φ 4D 1L und deshalb auch als die gegebene Fläche bzw. das Rechteck βHA.

(8) Nach diesen Voraussetzungen wird nun der Beweis so beendet werden: Die Differenz zwischen der gesamten vierlinigen und der treppenförmigen Fläche ist kleiner als das Rechteck ψ 4D 1L nach Absatz 6. Und es können Punkte auf der Kurve mit so kleinem Intervall und in so großer Anzahl angenommen werden, dass das Rechteck ψ 4D 1L kleiner ist als eine gegebene Fläche nach Absatz 7. Mit derselben Mühe kann also auch die Differenz zwischen dieser vierlinigen Fläche (von der auch der Satz spricht) und der treppenförmigen Fläche kleiner gemacht werden als eine gegebene Quantität. Das war zu beweisen.

Dieser Satz bedurfte eines langatmigeren Beweises, weil sich unsere Indivisibelnmethode von der üblichen, jedenfalls in diesem Fall, erheblich unterscheidet. Wenn aber in einem anderen, von dem unsrigen verschievero, in casu alio a nostro, curva aliqua 1N 2N 3N per ipsa spatii gradiformis puncta, 1N et 2N et 3N transiisset, ut in communi methodo indivisibilium, ubi figurae curvilineae tantum in parallelogramma resolvuntur, fieri solet; longe facilior fuisset demonstratio. Differentia enim spatii gradiformis [1N 1B 3B 2P 2N 1P 1N], et mixtilinei 1N 1B 3B, 3N 2N 1N, constaret exiguis trilineis 1N 1P 2N 1N, et 2N 2P 3N 2N, utique minoribus quam rectangula ipsis circumscripta, 1N 1P 2N, 2N 2P 3N, quae hic etiam vocabo complementalia, ergo et differentia dicta minor erit quam summa horum rectangulorum complementalium, summa autem horum rectangulorum complementalium nunquam major erit rectangulo facto ex summa basium, [1P 2N, 2P 3N], (quae nunquam major recta [3B 3N]) ducta in altitudinem unius, si omnium altitudo aequalis est (ut in methodo indivisibilium communi assumi solet) vel si inaequalis, in maximam. Ergo si maxima vel certe caeteris non minor, ponatur esse novissima, dicta differentia nunquam erit major rectangulo 2B 3B 3N, cujus altitudo cum possit fieri quantumlibet parva; etiam haec differentia inter spatium gradiforme et mixtilineum dato aliquo spatio minor reddi potest.

Jam summa rectangulorum elementarium, 1N 1B 2B 1P, et 2N 2B 3B 2P (aliorumque etc.), id est spatium gradiforme 1N 1B 3B 2P 2N 1P 1N constituentium, aequatur summae basium (nempe ordinatarum 1B 1N, 2B 2N, 3B 3N, ad curvam 1N 2N 3N;) ductae in altitudinem communem (si 1B 2B, vel 2B 3B intervallum ordinatarum ponatur semper aequale) ergo et spatium gradiforme metiri possumus summa applicatarum ducta in intervallum duarum proximarum semper aequale. Spatium autem gradiforme eousque produci potest, ut differentia ejus a mixtilineo fiat minor quavis data, ut ostendi. Ergo si quid de summa linearum sive area spatii gradiformis ita demonstrari poterit, ut locum habeat utcunque producatur spatium gradiforme, sive ut tum maxime locum habeat, cum spatii gradiformis applicatarum intervalla quantum satis est exigua sunt, id etiam de mixtilineo verum erit, sive error si quis committi potest, erit minor quovis errore as-

denen Fall irgendeine Kurve 1N 2N 3N durch eben die Punkte 1N und 2N und 3N der treppenförmigen Fläche hindurchgegangen wäre, wie es bei der üblichen Indivisibelnmethode, wo die krummlinigen Figuren nur in Parallelogramme zerlegt werden, gewöhnlich geschieht, wäre der Beweis bei weitem leichter gewesen. Denn die Differenz zwischen der treppenförmigen Fläche 1N 1B 3B 2P 2N 1P 1N und der gemischtlinigen 1N 1B 3B, 3N 2N 1N bestünde aus den kleinen dreilinigen Flächen 1N 1P 2N 1N, und 2N 2P 3N 2N, die jedenfalls kleiner sind als die ihnen selbst umschriebenen Rechtecke 1N 1P 2N, 2N 2P 3N, die ich hier auch komplementär nennen werde, also wird auch die besagte Differenz kleiner sein als die Summe dieser komplementären Rechtecke, die Summe dieser komplementären Rechtecke aber wird niemals größer sein als das Rechteck, das gebildet ist aus der Summe der Grundlinien 1P 2N, 2P 3N (die niemals größer als die Gerade 3B 3N ist) multipliziert mit der Höhe von einem, wenn die Höhe aller gleich ist (wie es bei der üblichen Indivisibelnmethode gewöhnlich angenommen wird) oder, wenn sie ungleich ist, mit der größten. Wenn also als die größte oder wenigstens nicht kleiner als die übrigen die letzte gesetzt wird, wird die besagte Differenz niemals größer sein als das Rechteck 2B 3B 3N. Da dessen Höhe beliebig klein gemacht werden kann, kann auch diese Differenz zwischen der treppenförmigen und der gemischtlinigen Fläche kleiner gemacht werden als irgendeine gegebene Fläche.

Nun ist die Summe der elementaren Rechtecke 1N 1B 2B 1P und 2N 2B 3B 2P (und der anderen etc.), d.h. derjenigen, die die treppenförmige Fläche 1N 1B 3B 2P 2N 1P 1N bilden, gleich der Summe der Grundlinien (nämlich der Ordinaten 1B 1N, 2B 2N, 3B 3N an der Kurve 1N 2N 3N) multipliziert mit der gemeinsamen Höhe (wenn das Intervall 1B 2B oder 2B 3B zwischen den Ordinaten als immer gleich gesetzt wird), also können wir auch die treppenförmige Fläche messen durch die Summe der angefügten Ordinaten multipliziert mit dem immer gleichen Intervall zwischen zwei benachbarten. Aber die treppenförmige Fläche kann soweit fortgesetzt werden, dass die Differenz zwischen ihr und der gemischtlinigen kleiner wird als eine beliebige gegebene, wie ich gezeigt habe. Wenn also etwas über die Summe von Linien bzw. den Inhalt einer treppenförmigen Fläche in der Weise bewiesen werden kann, dass es Gültigkeit hat, wie weit auch immer die treppenförmige Fläche fortgesetzt wird, bzw. dass es dann am meisten Gültigkeit hat, wenn die Intervalle der angefügten Ordinaten der treppenförmigen Fläche hinreichend klein sind, so wird dies auch von der gemischtlinigen wahr sein, bzw. der Fehler, wenn einer begangen signabili. Quare methodo indivisibilium quae per spatia gradiformia seu per summas ordinatarum procedit, ut severe demonstrata uti licebit.

Scholium

Hac propositione supersedissem lubens, cum nihil sit magis alienum ab ingenio meo quam scrupulosae quorundam minutiae in quibus plus ostentationis est quam fructus, nam et tempus quibusdam velut caeremoniis consumunt, et plus laboris quam ingenii habent, et inventorum originem caeca nocte involvunt, quae mihi plerumque ipsis inventis videtur praestantior[17]. Quoniam tamen non nego interesse Geometriae ut ipsae methodi ac principia inventorum tum vero theoremata quaedam praestantiora severe demonstrata habeantur, receptis opinionibus aliquid dandum esse putavi.

PROPOSITIO VII.[i]

> Si a quolibet curvae cujusdam puncto ad unum anguli recti in eodem plano positi latus ducantur ordinatae normales, ad alterum tangentes, et ex punctis occursus tangentium ducantur perpendiculares ad earum ordinatas, si opus est productas; et curva alia per intersectiones harum perpendicularium et ordinatarum transeat; erit spatium inter axem (ad quem ductae sunt ordinatae,) duas ordinatas extremas, et curvam secundam comprehensum, spatii inter curvam primam et rectas duas ejus extrema cum anguli recti propositi centro jungentes, comprehensi duplum.[18]

[i] *Am Rande:* Formanda figura peculiaris pro hac propositione.

[17] Zu Beginn der *Historia et Origo* wird betont, dass die Kenntnis der wahren Ursprünge besonders die *ars inviendi*, eine allgemeine „Entdeckungskunst", befördert.

[18] Hier wird also die Äquivalenz der Fläche eines dreilinigen Sektors einer Kurve zur entsprechenden vierlinigen Fläche der daraus abgeleiteten Resektenfigur formuliert. Ein entsprechendes Ergebnis hätte Leibniz in der ihm verfügbaren Literatur finden können: Roberval hatte eine solche Transformation in einem Brief vom 1. Januar 1646 an Torricelli mitgeteilt, die Gregory in der *Geometriae pars universalis* als Proposition 11 angibt [Hofmann 1970, 92f]. Contra: Leibniz scheint zu seiner Pariser Zeit noch kein eigenes Exemplar der *Geometriae pars universalis* besessen zu haben und hat es, wenn überhaupt, nur auszugsweise durchgesehen [Hofmann 1974, 70]. Pro: Leibniz hat dieses Werk sowie

werden kann, wird kleiner sein als irgendein angebbarer Fehler. Deshalb wird es erlaubt sein, die Indivisibelnmethode, die durch treppenförmige Flächen bzw. durch Summen von Ordinaten voranschreitet, als eine streng bewiesene zu benutzen.

Scholium

Über diesen Satz hätte ich mich gern hinweggesetzt, weil meinem Geist nichts ferner liegt als die übergenauen Kleinlichkeiten einiger Autoren, bei denen mehr Zurschaustellung als Ertrag vorhanden ist, denn sie verbrauchen auch Zeit gleichsam für einige Zeremonien und haben mehr Arbeit als Verstand und hüllen den Ursprung der Entdeckungen, der mir meistens bedeutender erscheint als die Entdeckungen selbst, in dunkle Nacht. Da ich nun jedoch nicht leugne, dass man im Interesse der Geometrie über streng bewiesene Methoden selbst und Prinzipien der Entdeckungen sowie gewisse besonders wichtige Sätze verfügt, bin ich der Meinung gewesen, dass den althergebrachten Ansichten in irgendeiner Form Rechnung getragen werden muss.

Satz VII.[i]

> Wenn von einem beliebigen Punkt einer gewissen Kurve zur einen Seite eines in derselben Ebene gelegenen rechten Winkels senkrechte Ordinaten, zur anderen Tangenten gezogen werden, und von den Treffpunkten der Tangenten zu ihren notfalls verlängerten Ordinaten Lote gezogen werden, und eine andere Kurve durch die Schnittpunkte dieser Lote und Ordinaten hindurchgeht, wird die Fläche, die von der Achse (zu der die Ordinaten gezogen sind), den zwei äußersten Ordinaten und der zweiten Kurve umschlossen ist, doppelt so groß sein wie die Fläche, die von der ersten Kurve und den zwei Geraden umschlossen ist, die die äußersten Punkte von ihr mit dem Zentrum des vorgegebenen rechten Winkels verbinden.

[i] *Am Rande:* TODO: Für diesen Satz ist eine bestimmte Figur zu bilden.

Definitiones

Latus cui ordinatae 1B 1C, 2B 2C occurrunt vocare soleo axem, A 1B 2B, alterum latus, A 1T 2T, ejusdem anguli recti TAB voco Axem conjugatum[19], cui hoc loco occurrunt tangentes CT. portiones A 1T. A 2T ab axe conjugato a tangentibus abscissas, inde a puncto A sumtas, voco Resectas, figuram ad curvam secundam 1D 2D 3D, ex resectis A 1T, A 2T, in ordinatas novas, 1B 2D, 2B 2D translatis factam, figuram Resectarum.[20] Qualis translatio fiet, si ex T. occursibus tangentium, perpendiculares TD ad ordinatas CB si opus est productas demittantur, et per puncta intersectionum D. transeat curva 1D 2D 3D. His positis ajo spatium Quadrilineum 1D 1B 3B 3D 2D 1D, parte axis 1B 3B, ordinatis extremis 1B 1D, 3B 3D, et curva nova 1D 2D 3D comprehensum, seu figuram Resectarum esse sectoris sive spatii trilinei 1C A 3C 2C 1C duabus rectis, ex anguli centro A ad curvae prioris extrema, 1C et 3C ductis, nempe A 1C, et A 3C, ac ipsa curva priore 1C 2C 3C, comprehensi duplum.

---

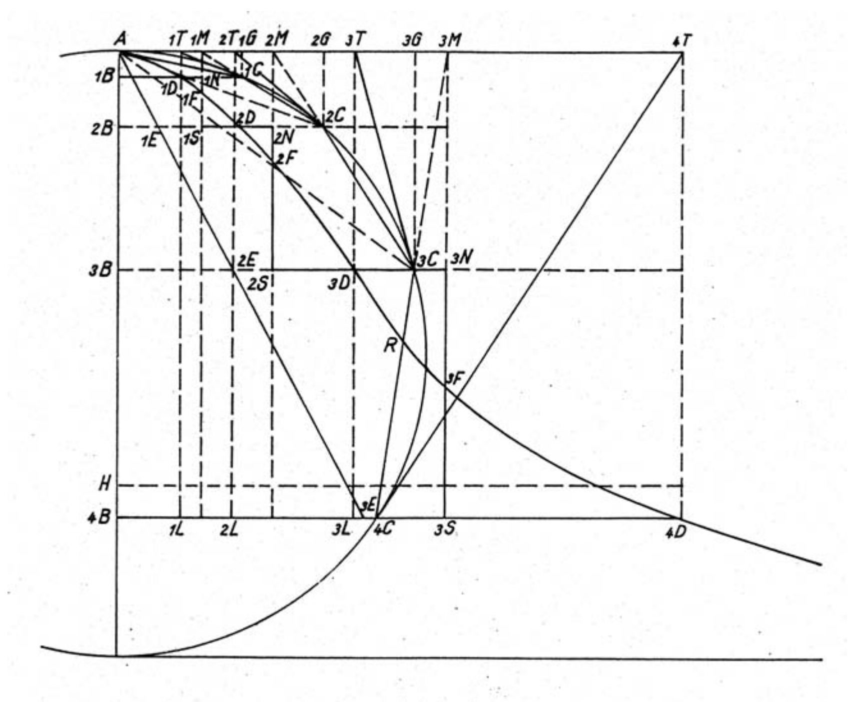
die *Vera circuli et hyperbolae quadratura* schon seit 1673 sehr oft und manchmal mit genauer Stellenangabe zitiert [Mahnke 1926, S. 29ff]. Satz 11 scheint er aber überlesen zu haben, denn noch 1680 führt er ihn nicht in Gregorys sondern in der von Barrow abgeänderten Fassung an [Mahnke 1926, 17].

[19] Die Bezeichnungen Achse und konjugierte Achse entstammen der Theorie der Kegelschnitte. In den Figuren der *Quadratura* folgt Leibniz dem Vorbild von Fabris *Synopsis Geometrica*, von der sich ein Handexemplar mit Anstreichungen und Randbemerkungen vom Frühjahr 1673 in Hannover befindet, und zieht die Gerade AB – unsere x-Achse – senkrecht nach unten, die konjugierte Achse – unsere y-Achse – zeigt nach rechts.

[20] Die an die Kurvenpunkte 1C und 2C angelegten Tangenten bestimmen durch ihre Schnittpunkte mit der konjugierten Achse Strecken A 1T, A 2T, die Leibniz Resekten nennt. Durch Übertragung der Resekten auf die allenfalls verlängerten Ordinaten 1B 1C bzw. 2B 2C wird eine neue Kurve 1D 2D, die Resektenfigur, definiert. Ist die Kurve durch einen Ausdruck y(x) gegeben, so gilt für die Resektenfigur $\tilde{y}(x) = y(x) - x \cdot \frac{dy}{dx}\Big|_x$, wobei $\frac{dy}{dx}\Big|_x$ die Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt (x,y(x)) bezeichnet.

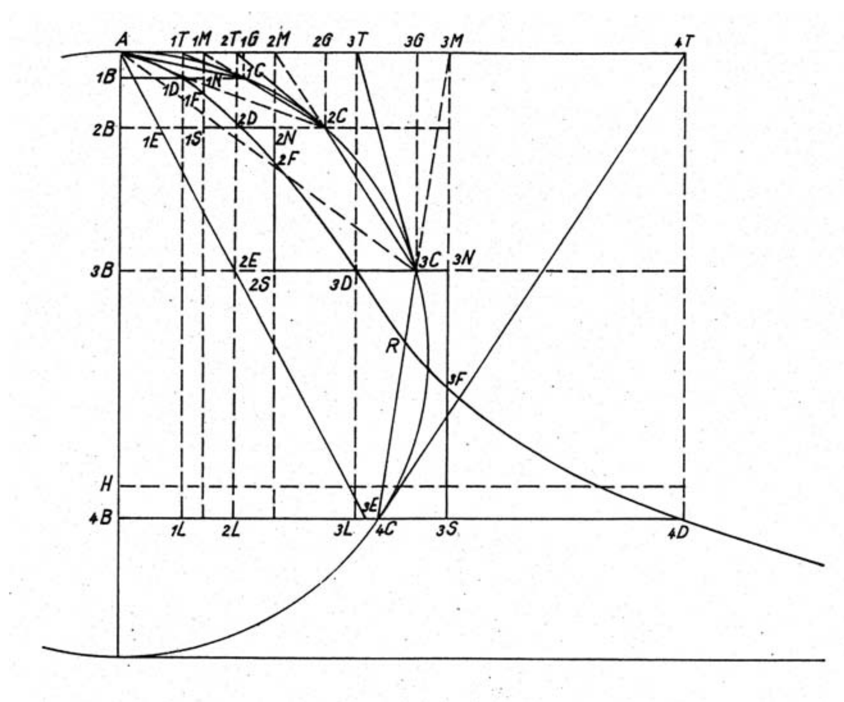
Definitionen

Die Seite A 1B 2B, auf welche die Ordinaten 1B 1C, 2B 2C treffen, pflege ich Achse zu nennen, die andere Seite A 1T 2T desselben rechten Winkels TAB nenne ich konjugierte Achse, auf welche an dieser Stelle die Tangenten CT treffen. Die von der konjugierten Achse durch die Tangenten abgeschnittenen Teile A 1T, A 2T, die von dort ab dem Punkt A genommen sind, nenne ich Resekten, die Figur an der zweiten Kurve 1D 2D 3D, die aus den zu den neuen Ordinaten 1B 1D, 2B 2D übertragenen Resekten A 1T, A 2T gebildet ist, Resektenfigur. Eine derartige Übertragung wird geschehen, wenn von den Treffpunkten T der Tangenten Lote TD auf die notfalls verlängerten Ordinaten CB gefällt werden, und durch die Schnittpunkte D die Kurve 1D 2D 3D hindurchgeht. Nach diesen Voraussetzungen behaupte ich, dass die vierlinige Fläche 1D 1B 3B 3D 2D 1D, die von dem Teil 1B 3B der Achse, den äußersten Ordinaten 1B 1D, 3B 3D und der neuen Kurve 1D 2D 3D umschlossen ist, bzw. die Resektenfigur doppelt so groß ist wie der Sektor bzw. das Trilineum 1C A 3C 2C 1C, die von den beiden Geraden, die vom Zentrum A des Winkels zu den äußersten Punkten 1C und 3C der ersten Kurve gezogen sind, nämlich A 1C und A 3C, und von der ersten Kurve selbst umschlossen ist.



(1) Ponatur non esse duplum, et differentia inter Trilineum duplum et Quadrilineum simplum sit Z.[21] Inscribantur ipsi curvae 1C 2C 3C polygona numero finita quotcunque libuerit, quantumque satis erit, et ultimum ex ejusmodi inscriptis Polygonis sit figura rectilinea A 1C 2C 3C A, quod rectis A 1C, A 3C ex centro A, ad curvam ductis, et rectis curvae inscriptis sive chordis 1C 2C, 2C 3C comprehensum est. Hae inscriptae producantur, ut antea tangentes, donec ipsi AT in punctis 1M, vel 2M occurrant rectae productae 2C 1C 1M, vel 3C 2C 2M. Ex quibus punctis M demissae perpendiculares 1M 1N 1S, vel 2M 2N 2S etc.

[21] Der Beweis betrachtet die Dreiecke A 1C 2C, A 2C 3C und die entsprechenden Rechtecke 1N 1B 2B, 2N 2B 3B, die eine erste Näherung an die dreilinige Fläche A 1C 2C 3C respektive die vierlinige Fläche 1D 1B 3B 3D realisieren. Nach Satz 1 ist das Doppelte der einzelnen Dreiecksflächen jeweils gleich der Fläche der entsprechenden Rechtecke. Es bleibt also zu zeigen, dass die Summe der Dreiecksflächen bei fortgesetzer Verfeinerung von 1B 3B die Sektorfläche immer besser annähert, da nach Satz 6 die entsprechende treppenförmige Figur die vierlinige Fläche der Resektenfigur bei entsprechender Unterteilung beliebig genau approximiert.



(1) Es sei vorausgesetzt, dass sie nicht doppelt so groß ist, und die Differenz zwischen der zweifachen dreilinigen und der einfachen vierlinigen Fläche sei Z. Der Kurve 1C 2C 3C selbst mögen Polygone von endlicher Anzahl, wie viele es auch immer sein mögen und wieweit es ausreichend sein wird, einbeschrieben werden, und die geradlinige Figur A 1C 2C 3C A sei das letzte von den derartig einbeschriebenen Polygonen, das von den Geraden A 1C, A 3C, die vom Zentrum A zur Kurve gezogen sind, und von den der Kurve einbeschriebenen Geraden bzw. den Sehnen 1C 2C, 2C 3C umschlossen ist. Diese einbeschriebenen Sehnen mögen soweit verlängert werden, wie vorher die Tangenten, bis die verlängerten Geraden 2C 1C 1M oder 3C 2C 2M in den Punkten 1M oder 2M auf AT treffen. Die von diesen Punkten M aus gefällten Lote 1M 1N 1S oder 2M 2N 2S etc. mögen die notfalls verlängerten Ordinaten 1B 1C, 2B 2C etc. in den Punkten 1N, 2N und die Ordinaten 2B 2C, 3B 3C etc. in den Punkten 1S, 2S etc. schneiden.

secent ordinatas si opus productas, [1B 1C. 2B 2C] etc. in punctis 1N. 2N et ordinatas [2B 2C. 3B 3C] etc. in punctis 1S. [2S] etc.

(2) Ponamus nunc inscriptionem Polygonorum eousque productam, donec polygoni A 1C 2C 3C A differentia a Trilineo 1C A 3C 2C 1C, itemque spatii rectilinei Gradiformis 1B 1N 1S 2N 2S 3B 1B, differentia a Quadrilineo 1D 1B 3B 3D 2D 1D, unaquaeque singulatim, sit minor, quam quarta pars ipsius Z.[i]

(3) His positis, patet ex prop. 1. trianguli A 1C 2C duplum esse rectangulum [1N 1B 2B] et trianguli A 2C 3C duplum esse rectangulum [2N 2B 3B], et ita de caeteris, si qua sint, ergo et summa rectangulorum hujusmodi quotcunque seu spatium Gradiforme duplum erit summae omnium ejusmodi triangulorum, seu polygoni inscripti.

(4) Jam differentia inter Quadrilineum, quod vocabo Q, et spatium gradiforme, id est, (ut probavi artic. 3.) duplum polygonum inscriptum quod vocabo P, minor est quam quarta pars ipsius Z, per artic. 2. et differentia inter duplum polygonum inscriptum P, et duplum trilineum cui inscriptum est, quod vocabo T. minor est quam duae quartae ipsius Z (quia inter ipsa simpla ex artic. 2. differentia minor est quam una quarta) ergo per prop. 5. differentia inter Quadrilineum, Q et duplum Trilineum, T minor est quam una quarta ipsius Z plus duabus, seu minor est quam tres quartae ipsius Z. nam si ita

stent Quantitates	Q	P	T
quarum Differentiae minores quam	$\frac{1}{4}$Z	$\frac{2}{4}$Z	

erit differentia inter Q et T minor quam $\frac{1}{4}Z + \frac{2}{4}Z$ per dictam prop. 5.

(5) Quoniam ergo differentia inter Quadrilineum et duplum Trilineum minor est quam $\frac{3}{4}$Z per artic. 4. erit multo minor quam Z, ergo minor se

[i] *Variante*: Quod fieri posse de Polygonis constat ex demonstrationibus Archimedeis[22], de spatio vero Gradiformi et Quadrilineo, si quis rigorem desideret, invenient demonstratum prop. 6. praecedenti.

[22] Archimedes führt in §6 von *De sphaera et cylindro* den Beweis für den Kreis. Die Aussage gilt auch für den Sektor A 1C 2C 3C eines beliebigen Kurvenstücks, da der Fehler bei der polygonalen Approximation von 1C 2C 3C sicher kleiner ist als die Summe der komplementären Rechtecke, die die Differenz zwischen den beiden Treppenfunktionen bilden, die die Ober- und Untersumme dieser Unterteilung realisieren. Diese Summe kann in Anschluss an Satz 6 durch Verfeinerung der Unterteilung beliebig klein gemacht werden. Ganz allgemein ist für Leibniz „jede krummlinige Kurve nichts anderes als ein Polygon mit unendlich vielen, der Größe nach unendlich kleinen Seiten“ (Scholium zu Satz 23, S. 78).

(2) Wir wollen nun die Einschreibung der Polygone soweit fortgeführt voraussetzen, bis die Differenz zwischen dem Polygon A 1C 2C 3C A und der dreilinigen Fläche 1C A 3C 2C 1C und ebenso die Differenz zwischen der geradlinigen treppenförmigen Fläche 1B 1N 1S 2N 2S 3B 1B und der vierlinigen 1D 1B 3B 3D 2D 1D, jede einzelne für sich, kleiner ist als der vierte Teil von Z.[i] Sie kann nämlich soweit fortgeführt werden, bis die Differenz kleiner als eine beliebige gegebene Quantität wird.

(3) Unter diesen Voraussetzungen ist nach Satz 1 klar, dass das Doppelte des Dreiecks A 1C 2C das Rechteck 1N 1B 2B ist und dass das Doppelte des Dreiecks A 2C 3C das Rechteck 2N 2B 3B ist, und ebenso bei den eventuell vorhandenen übrigen Flächen. Also wird auch die Summe beliebig vieler Rechtecke dieser Art bzw. die treppenförmige Fläche doppelt so groß sein wie die Summen aller derartigen Dreiecke bzw. wie das einbeschriebene Polygon.

(4) Nun ist die Differenz zwischen der vierlinigen, die ich Q nennen werde, und der treppenförmigen Fläche, d.h. (wie ich in Absatz 3 bewiesen habe) dem doppelten einbeschriebenen Polygon, das ich P nennen werde, kleiner als der vierte Teil von Z, nach Absatz 2, und die Differenz zwischen dem doppelten einbeschriebenen Polygon P und der doppelten dreilinigen Fläche, welcher es einbeschrieben ist, die ich T nennen werde, kleiner als zwei Viertel von Z (weil die Differenz zwischen den einfachen Flächen nach Absatz 2 kleiner als ein Viertel ist), also ist nach Satz 5 die Differenz zwischen der vierlinigen Q und der doppelten dreilinigen T kleiner als ein und zwei Viertel von Z, bzw. sie ist kleiner als drei Viertel von Z, denn, wenn

so die Quantitäten dastehen	Q	P	T
deren Differenzen kleiner sind als	$\frac{1}{4}$Z	$\frac{2}{4}$Z	

wird die Differenz zwischen Q und T kleiner als $\frac{1}{4}Z + \frac{2}{4}Z$ nach dem erwähnten Satz 5 sein.

(5) Da nun also die Differenz zwischen der vierlinigen und der doppelten dreilinigen Fläche nach Absatz 4 kleiner ist als $\frac{3}{4}$Z, wird sie viel kleiner

[i] *Variante*: TODO: Dass dies bei den Polygonen gemacht werden kann, folgt aus den Beweisen von Archimedes, einen wirklichen Beweis für die treppenförmige und vierlinige Fläche, falls Strenge gewünscht wird, findet man im vorhergehenden Satz 6.

ipsa (posita est enim esse Z, artic. 1.). Quod est absurdum. Nulla ergo differentia assumi potest, cum Z indefinita intelligi possit de qualibet, adeoque trilineum duplum et quadrilineum simplum aequalia sunt. Q. E. D.

Scholium

Duo fortassis hic notari e re erit, unum circa demonstrationem, alterum circa propositionem ipsam. Demonstratio illud habet singulare, quod rem non per inscripta ac circumscripta simul, sed per sola inscripta absolvit. Equidem fateor nullam hactenus mihi notam esse viam, qua vel unica quadratura perfecte demonstrari possit sine deductione ad absurdum; imo rationes habeo, cur verear ut id fieri possit per naturam rerum sine quantitatibus fictitiis[23], infinitis scilicet vel infinite parvis assumtis: ex omnibus tamen ad absurdum deductionibus nullam esse credo simplicem magis et naturalem, ac directae demonstrationi propiorem, quam quae non solum simpliciter ostendit, inter duas quantitates nullam esse differentiam, adeoque eas esse aequales, (cum alioquin alteram altera neque majorem neque minorem esse ratiocinatione duplici probari soleat) sed et quae uno tantum termino medio, inscripto scilicet [vel] circumscripto, non vero utroque simul, utitur; adeoque efficit, ut clariores de his rebus comprehensiones habeamus.

Quod ad ipsam attinet propositionem, arbitror unam esse ex generalissimis, atque utilissimis, quae extant in Geometria, usque adeo enim universalis est, ut omnibus curvis, etiam casu aut pro arbitrio sine certa lege ductis[24], conveniat; et data qualibet figura alias exhibeat numero infinitas[25], quarum singularum dimensio pendeat ex priore vel contra. Sed et inter foecundissima Geometriae theoremata haberi potest; nam hinc statim demonstrantur Quadraturae omnium Paraboloidum aut Hyperboloidum in infinitum; sive figurarum, in quibus ordinatae vel ipsarum potentiae sunt

[23]Die Einführung solcher unendlicher Größen dient einzig der Abkürzung des Redens und Denkens (S. 78). Deshalb ist die Frage nach ihrer Existenz für Leibniz ein Problem der Metaphysik und nicht etwa der Geometrie (S. 34).

[24]Das Ziehen der Tangente in einem Kurvenpunkt entspricht der Verlängerung der „unendlich kleinen Seite" eines eingeschriebenen Polygons und setzt deshalb keinen analytischen Ausdruck oder ein anderes Bildungsgesetz für die Kurve voraus.

[25]Die Resektenfigur hängt von der Wahl des Ursprungs und der Orientierung des Achsenkreuzes ab.

als Z, also kleiner als sie selbst sein (denn sie ist im Absatz 1 als Z gesetzt). Das ist unsinnig. Es kann also keine Differenz angenommen werden, weil Z unbegrenzt hinsichtlich einer beliebigen gedacht werden kann, und es sind deshalb die doppelte dreilinige und die einfache vierlinige gleiche Flächen. Das war zu beweisen.

Scholium

Es wird angemessen sein, hier vielleicht zweierlei zu bemerken, eines bezüglich des Beweises, ein anderes bezüglich des Satzes selbst. Der Beweis hat jenes Besondere, dass er das Problem nicht durch Einbeschriebenes und Umbeschriebenes zugleich, sondern nur durch Einbeschriebenes löst. Ich freilich gestehe, dass mir bis jetzt kein Weg bekannt ist, durch welchen auch nur eine einzige Quadratur perfekt bewiesen werden könne ohne Deduktion *ad absurdum*; im Gegenteil, ich habe Gründe, warum ich Bedenken habe, dass dieses wegen der Natur der Dinge ohne fiktive Quantitäten geschehen könne, und zwar die als unendlich oder als unendlich klein angenommenen: dennoch glaube ich, dass es von den Deduktionen *ad absurdum* keine einfachere und natürlichere gibt und näher einem direkten Beweis ist als die, welche nicht nur einfach zeigt, dass es zwischen zwei Quantitäten keine Differenz gibt und diese daher gleich sind, (während man sonst gewohnt ist, durch eine doppelte Rechnung zu beweisen, dass die eine weder größer noch kleiner ist als die andere), sondern welche auch nur einen mittleren Term, einen einbeschriebenen nämlich oder einen umbeschriebenen, aber nicht beide zugleich benutzt; deshalb bewirkt sie, dass wir klarere Verständnisse von diesen Dingen haben.

Was den Satz selbst betrifft, meine ich, dass er einer der allgemeinsten und nützlichsten ist, die es in der Geometrie gibt. Denn er ist dermaßen umfassend, dass er zu allen Kurven passt, auch wenn sie zufällig oder nach Belieben ohne ein bestimmtes Gesetz gezogen sind, und dass, wenn eine beliebige Figur gegeben ist, er unendlich viele andere aufzeigt, deren jeweilige Ausmessung von der ersten abhängt und umgekehrt. Er kann aber auch zu den fruchtbarsten Sätzen der Geometrie gerechnet werden, denn von hier aus werden sofort die Quadraturen aller Paraboloide und Hyperboloide bis ins Unendliche bewiesen bzw. der Figuren, bei denen in multiplicata aut submultiplicata directa aut reciproca ratione abscissarum aut potentiarum ab abscissis; et ut alias taceam quadraturas infinitas absolutas vel hypotheticas, Circulum certe et quamlibet Conicam centrum habentem ejus ope transformavimus in figuram rationalem, et hinc Quadraturam totius circuli ac portionis cujuslibet Arithmeticam, ac veram perfectamque arcus ex data tangente expressionem analyticam duximus, quibus demonstrandis hic tractatus occupatur.

Porro cum Clarissimi Geometrae[26], qui Conica universaliter tractare coepere, ordinatarum ad curvas nomine comprehendant non tantum rectas parallelas, quales sunt 1C 1B, 2C 2B, 3C 3B, ut vulgo[27] fieri solet, sed etiam rectas A 1C, A 2C, A 3C, quae omnes ad unum punctum commune A, convergunt (quod vel ideo recte fit, quoniam ipsaemet parallelae sine errore pro convergentibus sumi possunt, ita tantum ut punctum concursus earum seu centrum commune infinite abesse fingatur[28], quemadmodum alter parabolae focus aut vertex). Hinc jam ope theorematis hujus nostri feliciter evenit, ut harum quoque novarum ordinatarum, nempe convergentium usus esse possit ad quadraturas, utque figurae non tantum per ordinatas parallelas in parallelogramma 1C 1B 2B, vel 2C 2B 3B, aliaque, ut a Cavalerio aliisque[29] post ipsum fieri solitum est; sed et per ordinatas convergentes in triangula A 1C 2C, vel A 2C 3C, infinitis modis resolvantur, prout varie

[26] In der Variante werden explizit Desargues und Pascal genannt. Beim Studium der projektiven Geometrie in [Desargues 1639] und [Pascal 1640] ist Leibniz auf den Gedanken gekommen, Quadraturen von krummlinig begrenzten Flächenstücken nicht nur durch Annäherung mit rechteckig unterteilten Treppenfiguren (Parallelkoordinaten), sondern aus mit dreieckig unterteilten Vielecken (Polarkoordinaten) zu ermitteln. Entsprechend äußerte er sich auch in einem Konzept zum Beweis der arithmetischen Kreisquadratur: „La raison pourquoy ceux qui ont écrit de la Geometrie des Indivisibles, et de l'Arithmetique des infinis, n'ont pas fait la même remarque, est parce qu'on est accoustumé de ne resoudre les figures que par les ordonnées paralleles, en une infinité de petits rectangles, au lieu que j'ay trouvé un moyen general de resoudre utilement toute figure en une infinité de petits Triangles aboutissans à un point, par le moyen des ordonnées convergentes. Car Messieurs des Argues et Pascal on fort bien fait de prendre les ordonnées generalement par des lignes convergentes ou paralleles, [...].“ [An Gallois?, Ende 1675, LSB III 1, 359]

[27] siehe Anmerkung 5, S. 3

[28] Beim kurz vor Niederschrift der *Quadratura* erfolgten Studium der Manuskripte von Pascal zu den Kegelschnitten (siehe Anmerkung 31, S. 22) hielt Leibniz am Rande einer Skizze diese Desargues und Pascal seit längerem vertraute Vorstellung fest: „Duae linea parallelae concurrere intelliguntur, etsi locus concursus inifinite absit, . . . “ [Costabel 1962, 268?].

[29] siehe Anmerkung 5, S. 3

die Ordinaten oder ihre Potenzen in einem multiplikativen oder submultiplikativen direkten oder reziproken Verhältnis zu den Abszissen oder den Potenzen der Abszissen stehen. Und wir haben, um andere unendlich viele gelöste oder hypothetische Quadraturen außer acht zu lassen, den Kreis jedenfalls und einen beliebigen Kegelschnitt mit einem Zentrum mit seiner Hilfe in eine rationale Figur umgeformt, und von hier aus haben wir die arithmetische Quadratur des ganzen Kreises und eines beliebigen Teils und den wahren und vollkommenen analytischen Ausdruck eines Kreisbogens aus einer gegebenen Tangente abgeleitet; mit dem Beweis dieser Dinge befasst sich diese Abhandlung.

Ferner, weil die berühmtesten Geometer, die begonnen haben, die Kegelschnitte umfassend zu behandeln, mit der Benennung Ordinaten an Kurven nicht nur parallele Geraden erfassen, von welcher Art 1C 1B, 2C 2B, 3C 3B sind, wie es sonst gewöhnlich gemacht wird, sondern auch die Geraden A 1C, A 2C, A 3C, die alle auf einen gemeinsamen Punkt A gerichtet sind (was schon deshalb richtig gemacht wird, da ja die Parallelen eben selbst ohne Irrtum für konvergente Geraden gehalten werden können, nur in der Weise, dass man sich ihren Treffpunkt oder das gemeinsame Zentrum unendlich weit entfernt vorstellt, wie den anderen Brennpunkt oder Scheitel der Parabel), stellt sich von hier nun mit Hilfe dieses unseres Satzes leicht heraus, dass es auch eine Anwendung dieser neuen Ordinaten, nämlich der konvergenten, auf die Quadraturen geben kann, und dass die Figuren nicht nur durch parallele Ordinaten in Parallelogramme 1C 1B 2B oder 2C 2B 3B und andere aufgelöst werden, wie es von Cavalieri und anderen nach ihm gewöhnlich zu geschehen pflegte, sondern auch durch konvergente Ordinaten in Dreiecke A 1C 2C oder A 2C 3C auf unendlich viele Arten, je nachdem auf wie verschiedene Weise der Punkt A angenomassumitur punctum A, unde ingens novorum inventorum campus aperitur, quorum hic elementa damus, ex quibus scio non pauca, neque his inferiora duci posse.

Definitiones

Resectas et figuram Resectarum explicui in ipsius prop. praecedentis expositione.

Segmentum voco spatium, duabus lineis una curva altera recta comprehensum, ut spatium ACA, comprehensum duabus lineis, quarum una est recta AC, altera est curva etiam AC, utraque punctis, A, et C, terminata. Eodem modo spatium A 2C 1C A est segmentum comprehensum recta A 2C, et curva A 1C 2C. Si curva haec esset arcus circuli, foret spatium A 2C 1C A segmentum circulare, quod nomen cum huic spatio dudum tribui soleat, ejus exemplo caeteras id genus portiones, a figuris per rectas curvam in duobus punctis secantes, abscissas, segmenta appellandas putavi.

Sector est spatium trilineum ut 1C A 2C 1C, duabus rectis A 1C, A 2C, et una curva 1C 2C comprehensum. Si esset 1C 2C arcus circuli, et punctum A centrum circuli, adeoque rectae A 1C, et A 2C aequales, tunc utique etiam recepto more spatium 1C A 2C 1C appellaretur sector circuli, cujus exemplo caetera etiam id genus spatia, ubicunque sit punctum A, aut quaecunque sit curva, putavi appellari posse sectores, in quos scilicet rectis convergentibus area figurae dividitur.

Ex his autem statim patet, si una ex lineis ut A 1C evanesceret, et si puncta A et 1C coinciderent, ex sectore fieri segmentum, adeoque quae de sectoribus generaliter demonstrantur sine consideratione magnitudinis rectarum comprehendentium posse etiam applicari ad segmenta, ut sequenti propositione exquisitius ostendetur.

Ex his porro intelligitur figuram Resectarum duas habere species, nempe figuram Sectorum et figuram Segmentorum. Nempe figura sectorum

men wird, woher sich ein gewaltiges Feld neuer Entdeckungen eröffnet, deren Grundlagen wir hier geben, aus denen, wie ich weiß, nicht Weniges und nicht Geringeres als die Dinge hier abgeleitet werden können.

Definitionen

Die Resekten und die Resektenfigur habe ich in der Darlegung des vorhergehenden Satzes erklärt.

Segment nenne ich eine Fläche, die von zwei Linien, einer Kurve zum einen und einer Geraden zum anderen, umschlossen ist, wie die Fläche ACA, die von zwei Linien umschlossen ist, von denen die eine die Gerade AC und die andere die Kurve AC selbst ist, und jede der beiden durch die Punkte A und C begrenzt ist. Ebenso ist die Fläche A 2C 1C A ein Segment, das von der Geraden A 2C und der Kurve A 1C 2C umschlossen ist. Wenn diese Kurve der Kreisbogen wäre, würde die Fläche A 2C 1C A das Kreissegment sein. Weil man längst gewohnt ist, diesen Namen dieser Fläche zuzuschreiben, war ich der Meinung, dass anhand dieses Beispiels die übrigen derartigen Teile, die von den Figuren durch Geraden, die die Kurve in zwei Punkten schneiden, abgetrennt sind, Segmente benannt werden sollen.

Ein Sektor ist ein Trilineum wie 1C A 2C 1C, die von den zwei Geraden A 1C, A 2C und der einen Kurve 1C 2C umschlossen ist. Wenn 1C 2C ein Kreisbogen und der Punkt A der Mittelpunkt des Kreises wäre und deshalb die Geraden A 1C und A 2C gleich wären, dann würde jedenfalls auch nach herkömmlicher Art die Fläche 1C A 2C 1C Kreissektor genannt werden. Ich war der Meinung, dass anhand dieses Beispiels auch die übrigen derartigen Flächen, wo auch immer der Punkt A und welche auch immer die Kurve sei, Sektoren benannt werden können, in welche nämlich die Fläche einer Figur durch konvergente Geraden geteilt wird.

Hieraus ist aber sofort klar, dass, wenn eine der Linien, wie A 1C, verschwinden und die Punkte A und 1C zusammenfallen würden, aus einem Sektor ein Segment wird, und deshalb das, was über die Sektoren allgemein bewiesen wird, ohne Betrachtung der Größe der umschließenden Geraden, auch auf die Segmente angewendet werden kann, wie es im folgenden Satz genauer gezeigt werden wird.

Hieraus erkennt man ferner, dass die Resektenfigur zwei Gestalten hat, nämlich die Sektorenfigur und die Segmentfigur. Die Sektorenfigur wird erit zona quadrilinea 1D 1B 4B 4D 3D 2D 1D, si curva 4C 3C 2C 1C non perveniat in A. unde nec curva 4D 3D 2D 1D in A veniet; Figura autem sectorum commode appellabitur, quia haec Zona, ut quidam vocant, id est figura ordinatis parallelis axe et curva contenta, semper respondenti sectori proportionalis est; nempe 1D 1B 4B 4D 3D 2D 1D ad 1D 1B 3B 3D 2D 1D, zona ad zonam; ut 1C A 4C 3C 2C 1C ad 1C A 3C 2C 1C, sector ad sectorern. Si curva generans 4C 3C 2C 1C sit arcus circuli cujus centrum A, figura resectarum eo casu speciali nomine vocabitur Figura Angulorum, quia sectores figurae generantis, adeoque et zonae quadrilineae in figura generata sunt angulis proportionales, quod infra peculiari propositione[30] explicabo. Sin curva 3C 2C 1C A continuata perveniat in punctum A; adeoque et curva 3D 2D 1D A, hujus curvae figura appellabitur figura segmentorum, quoniam ejus portiones trilineae, inde a vertice A. ut A 1B 1D A, A 2B 2D 1D A, sunt [duplis] segmentis A 1C A, A 2C 1C A etc. aequales, ut mox clarius patebit.

Ordinatarum nomine intelligi solent rectae parallelae, ut 1B 1C, 2B 2C, etc. a quolibet curvae, 1C 2C 3C puncto, 1C, vel 2C, aliove, ad rectam quandam indefinitae longitudinis A 1B 2B, etc. quae a quibusdam Directrix appellatur ductae; alii simpliciter vocant parallelas, alii ordinatim applicatas; aliquando ordinatarum nomine stricte sumto, intelliguntur tantum normales ad directricem, et tunc directrix vocatur Axis, quoniam tunc figura circa directricem, velut axem, rotata solidumque generante, ordinata quaelibet circulum generat basi solidi parallelum.

Aliquando voce laxe sumta[i], per ordinatas, ut supra dixi intelliguntur et rectae convergentes, sive ab eadem curva ad punctum unum, velut centrum, concurrentes, quod suos habet usus sane praeclaros, quoniam plurima theoremata omnibus ordinatis generalissimo hoc sensu communia haberi possunt. Nos in hoc quidem argumento ordinatarum nomi-

[i] *Variante*: ut a Pascalio factum est in impressa quadam de Conicis scheda, quae specimen majoris operis, inediti quidem, sed si quod aliud in eo genere Geometricum, edendi (ODER Var. 2: edi imo digni,) fuit.[31]

[30] siehe Satz 14

[31] Leibniz hat vermutlich im Januar 1676 die Manuskripte der unveröffentlichten Arbeiten Pascals zu den Kegelschnitten erhalten. Nach Durchsicht empfiehlt er deren baldige Publikation: „Je conclus que cet ouvrage est en estat d'estre imprimé, et il ne faut pas demander s'il le merite: . . . " [An É. Périer, 30. VII 1676, LSB III, 1, 591] Pascals Aufzeichnungen sind seit der Rückgabe an die Gebrüder Périer verschollen, so dass nur noch Notizen von Leibniz Aufschluss über den Inhalt geben. TODO: (Pascal 1658a, hier PO VIII, 202 bzw. 217)

nämlich die vierlinige Zone 1D 1B 4B 4D 3D 2D 1D sein, wenn die Kurve 4C 3C 2C 1C nicht bei A ankommt, weshalb auch die Kurve 4D 3D 2D 1D nicht zu A kommen wird. Sie wird aber passenderweise Sektorenfigur benannt werden, weil diese Zone, wie einige sie nennen, d.h. die Figur, die durch parallele Ordinaten, die Achse und eine Kurve eingeschlossen ist, immer zum entsprechenden Sektor proportional ist, nämlich 1D 1B 4B 4D 3D 2D 1D zu 1D 1B 3B 3D 2D 1D, die Zone zur Zone, wie 1C A 4C 3C 2C 1C zu 1C A 3C 2C 1C, der Sektor zum Sektor. Wenn die erzeugende Kurve 4C 3C 2C 1C der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt A ist, wird die Resektenfigur in diesem besonderen Fall mit dem Namen Winkelfigur bezeichnet werden, weil die Sektoren der erzeugenden Figur, und deshalb auch die vierlinigen Zonen in der erzeugten Figur zu den Winkeln proportional sind, was ich unten in einem eigenen Satz erklären werde. Wenn aber die fortgesetzte Kurve 3C 2C 1C A zum Punkt A gelangt, und deshalb auch die Kurve 3D 2D 1D A, wird die Figur dieser Kurve Segmentfigur genannt werden, da ja ihre dreilinigen Teile, die von dort ab der Ecke A genommen sind wie A 1B 1D A, A 2B 2D 1D A, den doppelten Segmenten A 1C A, A 2C 1C A etc. gleich sind, wie es sich bald deutlicher zeigen wird.

Unter dem Begriff Ordinaten werden gewöhnlich parallele Geraden verstanden, wie 1B 1C, 2B 2C, die von einem beliebigen Punkt 1C oder 2C oder einem anderen der Kurve 1C 2C 3C zu einer gewissen Geraden A 1B 2B etc. von unbegrenzter Länge gezogen sind, die von einigen Direktrix genannt wird. Die einen nennen sie einfach Parallelen, andere der Reihe nach Angelegte. Manchmal, wenn der Begriff Ordinaten streng genommen wird, versteht man darunter nur Senkrechte zur Direktrix, und die Direktrix wird dann Achse genannt, da ja dann, wenn die Figur um die Direktrix, wie um eine Achse, gedreht wird und einen Körper erzeugt, eine beliebige Ordinate einen zur Grundfläche des Körpers parallelen Kreis erzeugt.

Manchmal werden, wenn das Wort weit gefasst wird[i], unter Ordinaten, wie ich oben gesagt habe, auch konvergente Geraden verstanden, die also von derselben Kurve auf einen einzigen Punkt, wie auf ein Zentrum hin, zusammenlaufen, was seine wirklich ausgezeichneten Vorteile hat, weil nun die meisten Sätze mit allen Ordinaten in dieser sehr allgemeinen Bedeutung gemeinsam erhalten werden können. In dieser Darstellung jedoch

[i] *Variante*: TODO: wie es von Pascal in einem gedruckten Papier (scida) über die Kegelschnitte gemacht wurde, das das Muster/Probestück (specimen) eines zwar unveröffentlichten größeren Werkes ist, aber falls eine Sache es wert ist, über diesen Bereich der Geometrie veröffentlicht zu werden, dann ist es diese

ne parallelas, et potissimum normales, intelligemus, quod plerumque ex subjecta materia satis apparebit.

Porro quando ordinatae parallelae ad quandam directricem ducuntur, tunc solet assumi in directrice punctum aliquod fixum, ut A, et portiones directricis inter punctum fixum A, et occursum ordinatarum, nempe punctum 1B, vel 2B, comprehensae, solent vocari Abscissae, aliqui vocant portiones Axis. Harum autem abscissarum usus esse solet ad explicandam curvae naturam per relationem abscissarum et ordinatarum inter se, ut si dicamus ipsas 1B 1C, 2B 2C esse inter se in subduplicata ratione abscissarum A 1B, A 2B, vel quod eodem redit, si una tantum aliqua abscissa atque ordinata assumta dicamus semper fore rectangulum sub A 1B abscissa et certa quadem recta constante, aequale quadrato ordinatae 1B 1D, tunc curva A 1C 2C erit Parabola.[32] Eodem modo si essent ordinatae 1B 1D, 2B 2D inter se in triplicata ratione abscissarum A 1B, A 2B, vel quod idem est, una tantum abscissa et ordinata assumtis, si cubus ab A 1B abscissa, aequaretur solido ex quadrato cujusdam rectae constantis, in ordinatam 1B 1C; foret curva Parabola Cubica.

Directrices conjugatas, vel cum angulus rectus est, quem comprehendunt, axes conjugatos voco (ad exemplum Diametrorum conjugatarum[33] jam apud veteres receptarum), cum abscissae unius sunt aequales ordinatis ad alteram, et contra. Quod fit, si modo eae directrices sese intersecent in puncto fixo, seu initio abscissarum, et una sit parallela ordinatis ad alteram.

[32] In der Sprechweise der Proportionentheorie wird das Verhältnis zweier Ordinaten untereinander zu dem der beiden entsprechenden Abszissen in Beziehung gesetzt, in diesem Fall 1B 1C zu 2B 2C gleich $\sqrt{A\,1B}$ zu $\sqrt{A\,2B}$. Die geometrische Interpretation formuliert die Flächengleichheit des Rechteckes aus der Abszisse A 1B und einer festen Strecke AP und dem Quadrat der entsprechenden Ordinate 1B 1C, also $A\,1B \cdot AP = (1B\,1C)^2$. Wird, wie in den Definitionen in Anschluss an Satz 14, für die Abszisse der Buchstabe y, für die Ordinate v und für AP, den Parameter, p gesetzt, lässt sich die Kurve durch die Gleichung $py = v^2$ beschreiben. In der Ebene kann dann durch Vertauschung der Achsen, die dem Übergang zu den konjugierten Abszissen und Ordinaten entspricht, auf einfache Weise die Kurve der Wurzelfunktion mit ihrer Umkehrfunktion, der quadratischen Parabel, identifiziert werden.

[33] Archimedes verwendet diese Bezeichnung für die Achsen der Ellipsen, Parmentier, S. 79 nennt Heath, TODO: Direkter Verweis

werden wir unter dem Namen Ordinaten Parallelen, und hauptsächlich senkrechte, verstehen, was meistens aus dem zugrunde liegenden Gegenstand sichtbar genug werden wird.

Wenn ferner parallele Ordinaten zu einer gewissen Direktrix gezogen werden, dann wird auf der Direktrix gewöhnlich irgendein fester Punkt, wie A, angenommen, und die Teile der Direktrix, die zwischen dem festen Punkt A und dem Treffpunkt der Ordinaten, nämlich dem Punkt 1B oder 2B, eingeschlossen sind, werden gewöhnlich Abszissen genannt, andere nennen sie Teile der Achse. Der Nutzen dieser Abszissen liegt aber gewöhnlich in der Erklärung der Kurvennatur durch die Beziehung der Abszissen und Ordinaten untereinander. Wenn wir z.B. sagen, dass 1B 1C, 2B 2C untereinander in einem subverdoppelten Verhältnis zu den Abszissen A 1B, A 2B stehen, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn wir bei der Annahme nur einer beliebigen Abszisse und Ordinate sagen, dass das Rechteck unter der Abszisse A 1B und einer gewissen bestimmten festen Geraden immer gleich dem Quadrat der Ordinate 1B 1D sein wird; dann wird die Kurve A 1C 2C eine Parabel sein. In derselben Weise würde die Kurve eine kubische Parabel sein, wenn die Ordinaten 1B 1D, 2B 2D untereinander in einem verdreifachten Verhältnis zu den Abszissen A 1B, A 2B stünden, oder, was dasselbe ist, wenn bei Annahme nur einer Abszisse und Ordinate der Kubus der Abszisse A 1B gleich dem Körper aus dem Quadrat einer gewissen festen Geraden multipliziert auf die Ordinate 1B 1C wäre.

Die Direktrizen nenne ich konjugiert, oder, wenn der Winkel, den sie einschließen, ein rechter ist, konjugierte Achsen (nach dem Vorbild der schon bei den Alten überlieferten konjugierten Durchmesser), wenn die Abszissen der einen gleich den Ordinaten an die andere sind und umgekehrt. Das ist der Fall, wenn eben diese Direktrizen sich in einem festen Punkt bzw. dem Ursprung der Abszissen schneiden, und die eine parallel

Ut si sit curva 1D 2D, et directrix sit A 1B 2B, et ordinatae ad hanc directricem angulo quocunque inter se parallelae, sint 1B 1D, 2B 2D, abscissae ex directrice sint A 1B, A 2B, denique per initium abscissarum A, transeat AT, ipsis 1B 1D, vel 2B 2D parallela, ea recta AT erit directrix, conjugata priori AB: nam in ipsa portio A 1T, aequalis ipsi 1B 1D ordinatae ad directricem priorem AB poterit sumi pro abscissa, et ipsa 1T 1D, aequalis ipsi A 1B abscissae ex directrice priore, erit ad conjugatam directricem ordinata. [Haec] consideratio magnos habet usus in omni Geometria, sed inprimis in materia de Quadraturis. Ordinatas porro ad Directrices conjugatas, etiam ordinatas conjugatas appello.

Trilineum orthogonium, vel aliquando simpliciter Trilineum[34], cum quibusdam voco, spatium axe, ordinata aliqua normali, et curva comprehensum, ut A 2B 2C 1C A, comprehensum axis portione seu abscissa A 2B, ordinata 2B 2C, et curva [2C 1C A], unde necesse est ut curva perveniat usque ad axem: axis portionem A 2B vocare solent altitudinem, ordinatam trilineum terminantem 2B 2C, basin. At A 2B 2C 2G Rectangulum circumscriptum vocant, quod communem habet altitudinem cum figura trilinea basin vero aequalem maximae ordinatae: quae si etiam ultima trilinei assumti est, tunc manifestum est hoc rectangulum (vel si ad ordinatas obliquas extendas, parallelogrammum) circumscriptum quatuor rectis comprehendi, ex quibus duae sunt ordinatae conjugatae, et duae abscissae conjugatae, quoniam semper abscissa unius directricis ordinatae ad alteram relatae aequalis et parallela est. Ita Trilinei Orthogonii A 2B 2C 1C A rectangulum circumscriptum est A 2B 2C 2G A. Complementum Trilinei Orthogonii, seu Trilineum Complementale vocant, quod Trilineo Orthogonio adscriptum, complet Rectangulum circumscriptum, ut si Trilineo Orthogonio A 2B 2C 1C A adscribatur Trilineum complementale A 2G 2C 1C A constituetur rectangulum circumscriptum A 2B 2C 2G. Unde sequitur ea sibi mutuo complementa esse, et esse ad Directrices conjugatas, et eandem curvam habere communem, et ubi unum est concavum, ibi alterum esse convexum, et altitudinem unius aequari basi alterius et

[34] Leibniz verweist hier auf Pascals „Traitté des Trilignes & de leurs Onglets“ aus den *Lettres de A. Dettonville contenant quelques-unes de ses Inventions de Géométrie. . .* , [TODO: Pascal, Lafuma, 142]. Auch die folgenden Bezeichnungen in diesem Abschnitt stimmen mit denen Pascals überein.

zu den Ordinaten an die andere ist. Wenn z.B. 1D 2D die Kurve und A 1B 2B die Direktrix ist, und 1B 1D, 2B 2D die unter einem beliebigen Winkel zueinander parallelen Ordinaten an diese Direktrix sind und A 1B, A 2B die Abszissen von der Direktrix sind, und außerdem durch den Ursprung A der Abszissen eine zu 1B 1D oder 2B 2D Parallele AT geht, wird diese Gerade AT die Direktrix sein, die zur ersten AB konjugiert ist; denn auf ihr wird man den Teil A 1T, der der Ordinate 1B 1D an die erste Direktrix AB gleich ist, für die Abszisse nehmen können, und der Teil 1T 1D, der der Abszisse A 1B von der ersten Direktrix gleich ist, wird die Ordinate an die konjugierte Direktrix sein. Diese Betrachtungsweise hat große Vorteile in jeder Geometrie, vor allem aber auf dem Gebiet der Quadraturen. Ferner benenne ich die Ordinaten an die konjugierten Direktrizen auch konjugierte Ordinaten.

Rechtwinkliges Trilineum oder manchmal einfach Trilineum nenne ich mit einigen anderen die Fläche, die von der Achse, irgendeiner senkrechten Ordinate und der Kurve umschlossen ist, wie A 2B 2C 1C A, die von einem Teil der Achse, bzw. der Abszisse A 2B, der Ordinate 2B 2C und der Kurve 2C 1C A umschlossen ist, weshalb es notwendig ist, dass die Kurve bis zur Achse gelangt; sie pflegen den Teil A 2B der Achse Höhe und die das Trilineum begrenzende Ordinate 2B 2C Grundlinie zu nennen. Aber A 2B 2C 2G nennen sie umbeschriebenes Rechteck, das mit der dreilinigen Figur eine gemeinsame Höhe hat, eine Grundlinie aber, die gleich der größten Ordinate ist; wenn diese sogar die letzte des angenommenen Trilineums ist, dann ist es offenbar, dass dieses umbeschriebene Rechteck (oder bei Erweiterung auf schräge Ordinaten Parallelogramm) von vier Geraden umschlossen ist, von denen zwei die konjugierten Ordinaten und zwei die konjugierten Abszissen sind, da ja immer die Abszisse der einen Direktrix gleich und parallel zur entsprechenden Ordinate an die andere ist. So ist von dem rechtwinkligen Trilineum A 2B 2C 1C A das umbeschriebene Rechteck A 2B 2C 2G A. Sie nennen die Fläche Komplement des rechtwinkligen Trilineums bzw. komplementäres Trilineum, die, dem rechtwinkligen Trilineum zugerechnet, das umbeschriebene Rechteck ausfüllt. Wenn z.B. dem rechtwinkligen Trilineum A 2B 2C 1C A das komplementäre Trilineum A 2G 2C 1C A zugerechnet wird, wird das umbeschriebene Rechteck A 2B 2C 2G hergestellt werden. Daher folgt, dass sie zueinander wechselseitig Komplemente sind und zu den konjugierten Direktrizen gehören und dieselbe Kurve gemeinsam haben, und dass dort, wo das eine konkav ist, das andere konvex ist, und dass die Höhe des einen gleich der Grundlinie contra, aliaque id genus, quae cuivis manifesta sunt.

Intersectio Directricium conjugatarum seu initium commune trilineorum se mutuo complentium, sive punctum in quo ordinata fit infinite parva, vel evanescit, ac curva ad axem pervenit, solet appellari vertex trilinei vel apex, qui etiam est punctum fixum sive initium abscissarum dicitur: sed non solet appellari vertex curvae, nisi quando alterutra directricium in eo curvam tangit.

Per Summam Rectarum ad quendam axem applicatarum intelligimus figurae perpetua applicatione factae aream[35], ut si dicam summam omnium AT ad axem AB, intelligo figuram ex omnibus AT in respondentibus punctis B, axi ordine applicatis factam, ut si A 1T translata sit in 1B 1D aequalem, atque ita applicata sit ad A 1B abscissam; et ita de caeteris. Angulus autem applicationis, solet intelligi rectus. Sed nec necesse est ut applicatae ipsum axem attingant, veluti: summa differentiarum inter AT et BC, quae aequantur ipsis DC dabit aream figurae 1D 1C 2C 3C 3D 2D 1D. Hae autem loquendi formulae permissae erunt, si quis fig. 8. per summam omnium rectarum, verbi gratia omnium BC, (id est ipsarum 1B 1C, et 2B 2C, et 3B 3C etc. aliarumque) intelligat summam omnium rectangulorum, ut 0B 1B 1C, 1B 2B 2C, 2B 3B 3C etc. sub ipsis rectis 1B 1C, 2B 2C, 3B 3C etc. et constante intervallo semper aequali 0B 1B, vel 1B 2B, vel 2B 3B etc. indefinitae parvitatis assumto, comprehensis. Quicquid enim de tali summa demonstrari poterit, sumto intervallo, utcunque parvo, id quoque de areae curvilineae 0C 0B 3B 3C 0C magnitudine demonstratum erit, cum summa ista (intervallo satis exiguo sumto) talis esse possit, ut ab ista summa rectangulorum differentiam habeat data quavis minorem.[36] Et proinde si quis assertiones nostras neget facile convinci possit ostendendo errorem quovis assignabili esse minorem, adeoque nullum.[37] Has cautiones nisi quis observet, facile

[35] Nicht nur die Terminologie – summa linearum, la somme des lignes oder la somme des ordonnées – sondern auch die Interpretation der Indivisibeln als beliebig schmale Flächen statt als breitenlose Linien geht auf das Studium von Pascal zwischen Mai und August 1673 zurück. Leibniz notiert in seinen Exzerpten *Ex Dettonvillaeis seu Pascalii*: „Wenn von der Summe der Linien in der Geometrie der Indivisibeln die Rede ist, muss man die Einheit angeben, nämlich eine Gerade, der sie appliziert sind und mit deren unendlich kleinen Teilen sie multipliziert werden.“ [Cat. crit. 544, Übersetzung nach Mahnke 1926, 32]. TODO: Histoire de la Roulette, Pascal (Lafuma), S. 135.

[36] Gemäß den Ausführungen weiter oben in Anschluss an den Beweis von Satz 6, S. 13f.

[37] Die Definition der Gleichheit zweier Größen als unendlich kleine Differenz steht als eines der beiden zentralen Postulate am Anfang der *Analyse des infiniment petits* des Marquis de l'Hôpital: „I. Demande ou supposition: On demande qu'on puisse prendre

des anderen ist und umgekehrt und derartige andere Dinge, die jedem offenbar sind.

Der Schnittpunkt der konjugierten Direktrizen bzw. der gemeinsame Ursprung der Trilinea, die sich gegenseitig ergänzen, bzw. der Punkt, bei dem die Ordinate unendlich klein wird oder verschwindet, und die Kurve zur Achse gelangt, wird gewöhnlich Scheitel des Trilineums oder Ecke benannt, die auch der Fixpunkt ist bzw. Abszissenursprung heißt; er wird aber gewöhnlich nicht Scheitel der Kurve benannt, außer wenn die eine der beiden Direktrizen in ihm die Kurve berührt.

Unter der Summe der an eine gewisse Achse angelegten Geraden verstehen wir den Flächeninhalt der durch ununterbrochene Anlegung hergestellten Figur. Wenn ich z.B. sage, die Summe aller AT an der Achse AB, verstehe ich darunter die Figur, die aus allen in den entsprechenden Punkten B an die Achse der Reihe nach angelegten AT hervorgeht, z.B., wenn A 1T in das gleichlange 1B 1C überführt und so an die Abszisse A 1B angelegt ist, und ebenso bei den übrigen. Der Winkel der Anlegung wird aber gewöhnlich als ein rechter gedacht. Es ist aber auch nicht notwendig, dass die angelegten Geraden die Achse selbst berühren, wie z.B. die Summe der Differenzen zwischen AT und BC, die gleich DC sind, den Flächeninhalt der Figur 1D 1C 2C 3C 3D 2D 1D ergeben wird. Diese Sprachregelungen werden aber erlaubt sein, wenn man in Fig. 8 unter der Summe aller Geraden, z.B. aller BC (d.h. von 1B 1C und 2B 2C und 3B 3C etc. und der anderen), die Summe aller Rechtecke wie 0B 1B 1C, 1B 2B 2C, 2B 3B 3C etc. versteht, die unter den Geraden 1B 1C, 2B 2C, 3B 3C etc. und einem angenommenen festen, immer gleichen Intervall 0B 1B oder 1B 2B oder 2B 3B etc. von unbegrenzter Kleinheit eingeschrieben sind. Denn was auch immer man von einer derartigen Summe beweisen können wird, wie klein auch immer das Intervall gewählt ist, das wird auch von der Größe[i] der krummlinigen Fläche 0C 0B 3B 3C 0C bewiesen sein, weil jene Summe (wenn das Intervall hinreichend klein gewählt ist) so beschaffen sein kann, dass die Summe der Rechtecke zu dieser eine Differenz hat, die kleiner ist als eine beliebige gegebene. Und wenn daher jemand unsere Behauptungen leugnen sollte, könnte er leicht überzeugt werden durch den Hinweis, dass der Fehler kleiner als ein beliebiger angebbarer und deshalb keiner ist. Wenn jemand diese Vorsichtsmaßnahmen nicht beachten sollte, kann er leicht von der

[i] Größe: *magnitudo*

ab indivisibilium [methodo] decipi potest. Exemplum infra dabimus prop. [XXII. scholium].

PROPOSITIO VIII.

> Iisdem positis quae in propositione praecedenti, eadem locum habebunt licet initium utriusque curvae in angulum rectum incidat, sive licet puncta 1B, 1C, 1D, inter se et cum puncto A, coincidere intelligantur, adeoque figurae quam voco segmentorum portio seu trilineum orthogonium A 3B 3D 2D A aequale erit duplo segmento figurae generantis A 3C 2C A.

Hoc uno verbo confici potest, ex eo quod quae propositione 7. demonstravimus generalia sunt, et locum habent, utcunque parvae sint rectae A 1C, A 1B, 1B 1D, 1B 1C, ac proinde etsi sint infinite parvae, sive etsi puncta coincidant, ubi sector 1C A 3C 2C 1C degenerabit in segmentum A 3C 2C A; et quadrilineum sive zona hujus sectoris dupla 1D 1B 3B 3D 2D 1D degenerabit in trilineum orthogonium A 3B 3D 2D A, ergo hoc trilineum hujus segmenti duplum erit.[38] Si quis tamen lineam infinite parvam ferre non possit, hunc non ideo minus convincemus.[39] Neget esse duplum, et differentia inter unum duplum et alterum simplum sit Z.

---

indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne différent entr'elles que d'une quantité infiniment petite; [...]." [l'Hôpital 1696, 2f]

[38] Bei Pascal hatte Leibniz gesehen, dass geometrische Verhältnisse, etwa zwischen den Seiten des charakteristischen Dreiecks, beim kontinuierlichen Übergang zur infinitesimalen Figur erhalten bleiben. Dass dieses heuristische Prinzip im Einzelfall auch streng bewiesen werden kann, zeigt exemplarisch dieser Satz. In der um 1701 entstandenen Schrift *Cum prodiisset* wird die Übertragbarkeit vom beliebig kleinen, aber immer endlichen, Fall auf den Grenzfall zum allgemeinen Prinzip erhoben, aus dem sich die in der ersten Veröffentlichung zum Infinitesimalkalkül, der *Nova methodus* von 1684, formulierten Resultate ableiten lassen [Bos 1974, 56-59]: „Falls irgendein kontinuierlicher Übergang vorgegeben wird, der in eine bestimmten Grenze übergeht, dann mag es möglich sein, eine allgemeine Schlussfolgerung einzusetzen, durch die die letzte Grenze umfasst werden möge." [Cum prodiisset, 40, zitiert nach Bos 1974, 56]

[39] Das nun folgende Stetigkeitsargument entspricht in seiner Struktur der Weierstraßschen „Epsilontik": Leibniz zeigt, dass sowohl der Flächeninhalt des Sektors als auch der der vierlinigen Fläche in der Umgebung vom Ursprung A stetig von 1B abhängen und deshalb die Reihenfolge der Grenzwertbildung vertauscht werden kann. Die Differenz zwischen den Grenzflächen ist also gleich dem Limes der Differenz der entsprechenden Flächen für 1B ungleich A. Nach Satz 7 ist die vierlinige Fläche im nicht entarteten Fall stets gleich dem doppelten Sektor. Also sind auch die beiden Grenzflächen, die Segmentfigur und das doppelte Segment der erzeugenden Figur, inhaltsgleich.

Indivisibelnmethode getäuscht werden. Ein Beispiel werden wir unten im Scholium zu Satz 22 geben.

Satz VIII.

> Unter denselben Voraussetzungen wie im vorhergehenden Satz wird dasselbe gelten, auch wenn der Ursprung beider Kurven in den rechten Winkel fällt bzw. auch wenn die Punkte 1B, 1C, 1D so gedacht werden, dass sie untereinander und mit dem Punkt A zusammenfallen, und deshalb der Teil der Figur, den ich Segmentfigur nenne, bzw. das rechtwinklige Trilineum A 3B 3D 2D A dem doppelten Segment A 3C 2C A der erzeugenden Figur gleich sein wird.

Dieses kann mit einem Wort daraus gefolgert werden, dass das, was wir in Satz 7 bewiesen haben, allgemein ist und Gültigkeit hat, wie klein auch immer die Geraden A 1C, A 1B, 1B 1D, 1B 1C sein mögen. Und wenn sie daher auch unendlich klein sind bzw. die Punkte zusammenfallen, wird auch, während der Sektor 1C A 3C 2C 1C in das Segment A 3C 2C A entarten wird, die vierlinige Fläche oder die Zone 1D 1B 3B 3D 2D 1D, die das Doppelte dieses Sektors ist, in das rechtwinklige Trilineum A 3B 3D 2D A entarten, also wird dieses Trilineum das Doppelte dieses Segments sein. Sollte jemand dennoch eine unendlich kleine Linie nicht ertragen können, werden wir diesen deshalb nicht weniger überzeugen. Er mag leugnen, dass es das Doppelte ist, und die Differenz zwischen dem einen Doppelten und dem anderen Einfachen sei Z.

Assumatur recta A 1B tam parva, ut rectangulum A 1B 1C 1G[i] sit minus quam quarta pars ipsius Z, ergo et quae intra ipsum sunt, segmentum exiguum A 1C A, item trilineum exiguum A 1B 1D A erunt minora quam $\frac{Z}{4}$. Segmentum exiguum est differentia segmenti magni A 3C 2C A, et sectoris 1C A 3C 2C 1C, et trilineum exiguum est differentia trilinei magni A 3B 3D 2D A et Quadrilinei 1D 1B 3B 3D 2D 1D. Ergo erit:

Determinatio prima: Differentia inter Segmentum Magnum et Sectorem, quae est ipsum segmentum exiguum, est minor quam $\frac{Z}{4}$.

Determinatio secunda: Differentia inter Trilineum magnum et Quadrilineum, quae est ipsum Trilineum exiguum, est minor quam $\frac{Z}{4}$. Et quoniam per prop. 7. Quadrilineum aequale duplo sectori; hinc ex determinatione 2. sequitur

Determinatio tertia: Differentia inter trilineum magnum et duplum sectorem minor est, quam $\frac{Z}{4}$. Ex determinatione autem 1. sequitur

Determinatio quarta: Differentia inter duplum sectorem et duplum segmentum est minor quam $\frac{2}{4}$Z. Ex determinationibus tertia et quarta oritur schema sequens [:]

Quantitates:	Trilin. Magn.	dupl.sect.	dupl. segm.
Differentiae		min. quam $\frac{Z}{4}$	min. quam $\frac{2}{4}$Z

Ergo per prop. 5. Trilinei magni et dupli segmenti differentia minor est quam $\frac{Z}{4} + \frac{2}{4}$[Z], seu minor quam $\frac{3}{4}$Z. Ergo minor se ipsa posita est enim esse Z. Quod est absurdum, nulla ergo poni potest differentia Z, adeoque Trilineum magnum nempe A 3B 3D 2D A aequale erit duplo segmento A 3C 2C A. Quod demonstrandum erat.

Scholium

Haec ideo minutim exposui, ut viri docti agnoscant, quam nullo negotio severe demonstrari queant, quae illis suspecta videntur, quo possint imposterum Geometrae his minutiis tuto supersedere, cum similis ratiocinatio inciderit.

[i] *geändert aus*: 2T, vgl. Anm. zu Fig. 3a

Die Gerade A 1B sei so klein angenommen, dass das Rechteck A 1B 1C 1G kleiner als der vierte Teil von Z ist. Also werden auch die Flächen, die innerhalb von ihm liegen, das kleine Segment A 1C A und ebenso das kleine Trilineum A 1B 1D A, kleiner als $\frac{Z}{4}$ sein. Das kleine Segment ist die Differenz des großen Segments A 3C 2C A und des Sektors 1C A 3C 2C 1C, und das kleine Trilineum ist die Differenz des großen Trilineum A 3B 3D 2D A und des Quadrilineums 1D 1B 3B 3D 2D 1D. Es wird also sein:

erste Bestimmung: Die Differenz zwischen dem großen Segment und dem Sektor, die das kleine Segment selbst ist, ist kleiner als $\frac{Z}{4}$.

zweite Bestimmung: Die Differenz zwischen dem großen Trilineum und der vierlinigen Fläche, die das kleine Trilineum selbst ist, ist kleiner als $\frac{Z}{4}$. Und weil nun nach Satz 7 die vierlinige Fläche gleich dem doppelten Sektor ist, folgt hieraus gemäß Bestimmung 2 die

dritte Bestimmung: Die Differenz zwischen dem großen Trilineum und dem doppelten Sektor ist kleiner als $\frac{Z}{4}$. Aus Bestimmung 1 folgt aber die

vierte Bestimmung: Die Differenz zwischen dem doppelten Sektor und dem doppelten Segment ist kleiner als $\frac{2}{4}$Z. Aus der dritten und vierten Bestimmung entsteht folgendes Schema:

Quantitäten:	gr. Trilineum	dopp. Sektor	dopp. Segment
Differenzen		kleiner als $\frac{Z}{4}$	kleiner als $\frac{2}{4}$Z

Also ist nach Satz 5 die Differenz zwischen dem großen Trilineum und dem doppelten Segment kleiner als $\frac{Z}{4} + \frac{2}{4}$Z oder kleiner als $\frac{3}{4}$Z. Also ist sie kleiner als sie selbst gesetzt, nämlich Z zu sein. Das ist unsinnig, also kann keine Differenz Z gesetzt werden, und deshalb wird das große Trilineum, nämlich A 3B 3D 2D A gleich dem doppelten Segment A 3C 2C A sein, was zu beweisen war.

Scholium

Ich habe dies deshalb bis ins einzelne auseinander gesetzt, damit die gelehrten Männer erkennen, wie ohne jede Mühe das, was ihnen verdächtig erscheint, streng bewiesen werden kann, und damit die Geometer sich in Zukunft gefahrlos über diese Kleinlichkeiten hinwegsetzen können, wenn eine ähnliche Überlegung anfallen sollte.

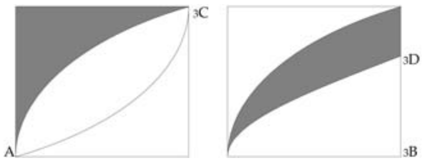
PROPOSITIO IX.

> Si trilineum figurae segmentorum cadat intra trilineum figurae generatricis, differentia eorum seu figura duabus curvis in vertice concurrentibus, et differentia ordinatarum comprehensa aequalis est complemento Trilinei ipsius Generatricis, seu differentiae ejus a rectangulo circumscripto.

In eadem semper figura, quoniam trilineum A 3B 3D 2D A, cadit intra trilineum A 3B 3C 2C A, ajo differentiam eorum, seu figuram A 2D 3D 3C 2C A comprehensam duabus curvis A 2D 3D, A 2C 3C, et recta 3D 3C, quae est differentia ordinatarum 3B 3C et 3B 3D, aequari ipsi A 3G 3C 2C A complemento trilinei A 3B 3C 2C A ad rectangulum A 3B 3C 3G.

Super segmenti A 3C 2C A chorda sive subtensa A 3C aliud in alteram partem constituatur segmentum A 3C VA, priori per omnia simile, similiter positum, et aequale.[40] Ostensum est prop. 8. spatio ex his duobus segmentis composito AV 3C 2C A aequari trilineum figurae segmentorum A 3B 3D 2D A. Ergo si ab eadem figura generatrice A 3B 3C 2C A auferantur aequalia, hinc duplum segmentum AV 3C 2C A, ut restet trilineum A 3B 3C VA, et illinc figura segmentorum A 3B 3D 2D A, ut restet figura bicurvilinea A 2D 3D 3C 2C A, sequetur haec duo residua figuram scilicet bicurvilineam et trilineum A 3B 3C VA, id est huic trilineo per omnia simile et aequale trilineum complementale A 3G 3C 2C A, aequari: quod ostendere propositum erat.

[40] Der auf einer Symmetriebetrachtung beruhende Beweis läßt sich grafisch einfach nachvollziehen. Die linsenförmige Fläche, die durch Spiegelung des Kurvensegments an der Hypothenuse entsteht, ist nach Satz 8 gleich der Segmentfigur. Wird auf beiden Seiten die zur Erzeugerfigur A 3B 3C A komplementäre Fläche subtrahiert, verbleiben die beiden dunklen Flächenstücke, deren Gleichheit zu zeigen war.



Satz IX.

> Wenn das Trilineum der Segmentfigur innerhalb des Trilineums der Erzeugerfigur liegt, ist deren Differenz bzw. die Figur, die von den beiden in der Ecke zusammenlaufenden Kurven und der Differenz der Ordinaten umschlossen ist, gleich dem Komplement des erzeugenden Trilineums selbst bzw. der Differenz zwischen ihm und dem umbeschriebenen Rechteck.

Weil nun das Trilineum A 3B 3D 2D A innerhalb der dreilinigen A 3B 3C 2C A liegt, behaupte ich, dass immer in derselben Figur deren Differenz bzw. die Figur A 2D 3D 3C 2C A, die von den beiden Kurven A 2D 3D, A 2C 3C und der Geraden 3D 3C, die die Differenz der Ordinaten 3B 3C und 3B 3D ist, umschlossen ist, gleich A 3G 3C 2C A ist, dem Komplement des Trilineums A 3B 3C 2C A zum Rechteck A 3B 3C 3G.

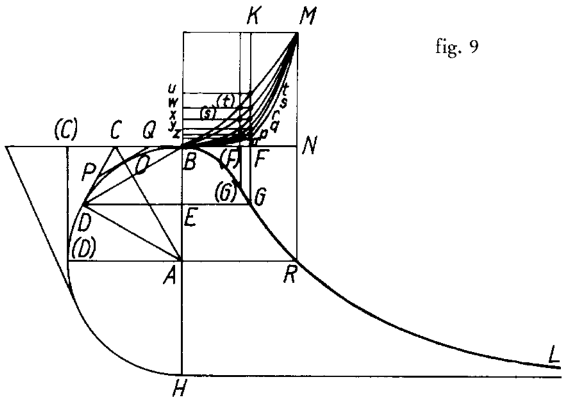
Über der Sehne bzw. Hypotenuse A 3C des Segments A 3C 2C A sei ein anderes Segment A 3C VA zur anderen Seite hin angelegt, dem ersten in allem ähnlich, ähnlich gesetzt und gleich. Es wurde in Satz 8 gezeigt, dass der aus diesen beiden Segmenten zusammengesetzten Fläche AV 3C 2C A das Trilineum der Segmentfigur A 3B 3D 2D A gleich ist. Wenn also von derselben Erzeugerfigur A 3B 3C 2C A Gleiches abgezogen wird, einerseits das doppelte Segment AV 3C 2C A, so dass das Trilineum A 3B 3C VA übrig bleibt, und andererseits die Segmentfigur A 3B 3D 2D A, so dass die zweiseitig krummlinige Figur A 2D 3D 3C 2C A übrig bleibt, wird folgen, dass diese beiden Reste, nämlich die zweiseitig krummlinige Figur und das Trilineum A 3B 3C VA, d.h. das zu diesem Trilineum in allem ähnliche und gleiche komplementäre Trilineum A 3G 3C 2C A, gleich sind. Dies zu zeigen war das Ziel.

PROPOSITIO X.

Trilineum DCBOD[i] (fig. 9.[41]) seu Trianguli DCB, (tangente CD axe occursuum seu conjugato BC et chorda DB comprehensi) excessus super segmentum BDOB; dimidium est trilinei BFGB, quod figurae segmentorum EGB complemento est.[42]

Nam triangulum DCB dimidium est rectanguli BEGF, (quia eadem basis BC vel BF, et altitudo BE) quare si a rectangulo BEGF, auferatur figura segmentorum BEGB, ut restet BFGB, et a dimidio rectanguli, seu a triangulo DCB auferatur dimidia figura segmentorum, seu per prop. 8. ipsum segmentum DBOD; restabit trilineum DCBOD. dimidium ipsius BFGB. Quoniam DCBOD differentia dimidiorum, DCB, DBOD, dimidia est BFGB differentiae totorum BEGF, BEGB.[ii] adde prop. 29.

fig. 9



EG aequ. BC aequ. BF aequ. DC

[i] *geändert aus*: DCOB
[ii] *geändert aus*: BFGB

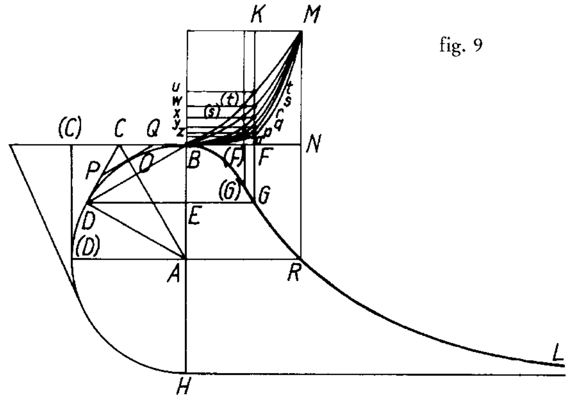
[41] Im Gegensatz zu den vorhergehenden Figuren ist die Erzeugerfigur hier an der Achse gespiegelt.
[42] Diese Übertragung von Satz 8 auf die komplementären Flächen DCBOD (zum Segment BDOB) und BFGB (zur Segmentfigur EGB) wird beim Beweis der arithmetischen Kreisquadratur in Satz 29 Anwendung finden.

Satz X.

Das Trilineum DCBOD (Fig. 9) bzw. der über das Segment BDOB hinausgehende Überschuss des Dreiecks DCB (das von der Tangente CD, der Achse der Treffpunkte bzw. der konjugierten Achse BC und der Sehne BD umschlossen ist) ist die Hälfte des Trilineums BFGB, welches zur Segmentfigur EGB das Komplement ist.

Das Dreieck DCB ist nämlich die Hälfte des Rechtecks BEGF (weil die Grundlinie BC oder BF und die Höhe BE dieselbe ist). Aus diesem Grund wird, wenn vom Rechteck BEGF die Segmentfigur BEGB abgezogen wird, so dass BFGB übrig bleibt, und von der Hälfte des Rechtecks bzw. vom Dreieck DCB die halbe Segmentfigur bzw. nach Satz 8 das Segment DBOD selbst abgezogen wird, das Trilineum DCBOD übrig bleiben, d.h. die Hälfte von BFGB, da ja die Differenz DCBOD der Hälften DCB, DBOD, die Hälfte der Differenz BFGB der Ganzen BEGF, BEGB ist. Füge den Satz 29 hierzu.

fig. 9



EG aequ. BC aequ. BF aequ. DC

PROPOSITIO XI.

> A figura curvilinea utcunque exigua portionem abscindere, cujus duplo exhibeatur aequalis figura longitudinis infinitae, infinitis modis.

Quantulacunque sit figura curvilinea utique infinitis modis aliquod curvae ejus ${}_2C\,{}_3C\,{}_4C\,\mu$ (redeundo ad fig. 3.) punctum eligi potest, quale est μ, ad quod duci potest tangens $\mu\lambda$, et ad hanc tangentem perpendicularis ${}_2B\,\mu$, intra figuram; ita ut abscindi possit a figura trilineum orthogonium ${}_2C\,{}_2B\,\mu\,{}_4C\,{}_3C\,{}_2C$. ajo hujus duplo aequalem posse exhiberi figuram infinitam; et ostendi posse modum exhibendi.[43]

Per aliquod rectae ${}_4B\,\mu$, productae si ita libuerit, punctum A, ducatur perpendicularis AT, parallela scilicet tangenti $\mu\lambda$, et ex curvae ${}_2C\,\mu$, punctis ${}_3C$, aut ${}_4C$ ducantur tangentes quae ipsi AT occurrant in punctis ${}_3T$, et ${}_4T$ et similibus; et ex punctis occursuum ${}_3T$, ${}_4T$ [demittantur perpendiculares] ${}_3T\,{}_3D$, ${}_4T\,{}_4D$ ad ${}_3B\,{}_3D$, ${}_4B\,{}_4D$ ordinatas tangenti $\mu\lambda$ parallelas, si opus est, productas: idque perpetuo factum intelligatur, a puncto ${}_2C$ usque ad punctum μ, ut in prop. 7. tunc habebimus spatium infinitum [${}_2D\,{}_2B\,\mu\lambda\delta\,{}_4D\,{}_3D\,{}_2D$] duabus lineis rectis finitis ${}_2D\,{}_2B$ et ${}_2B\,\mu$, duabusque lineis infinitis una curva in infinitum procedente, ${}_2D\,{}_3D\,{}_4D\,\delta$ altera recta ipsi asymptoto, $\mu\lambda$ comprehensum.

Porro curvam [${}_2D\,{}_3D\,{}_4D\,\delta$] infinitam esse patet, quia quanto propius aberit punctum ut ${}_4C$ a puncto μ, hoc longior erit recta A ${}_4T$, et si qua detur linea recta finita, poterit semper punctum ut ${}_4C$ tale tamque propinquum puncto μ mente designari, ut ipsa A ${}_4T$, vel ei aequalis ${}_4B\,{}_4D$, sit data linea recta finita major, adeoque curva [${}_4D\,\delta$] procedet in infinitum versus λ; semperque magis magisque descendet ad rectam $\mu\lambda$ prout punctum ut ${}_4B$ vel ${}_4C$ vel ${}_4D$ ipsi $\mu\lambda$ propius assumitur: nunquam tamen ad rectam $\mu\lambda$ perveniet. Nam si ad eam perveniret in puncto aliquo ut λ, ipsa $\mu\lambda$ foret ordinata ad curvam, adeoque aequali portioni ex AT, per tangentem in μ, id est per ipsam $\mu\lambda$, ipsi AT, si possibile esset, occurrentem, abscissae, sive

[43] Leibniz nutzt die Freiheit bei der Wahl von Ursprung und Orientierung der Achse AT zur Konstruktion von Resektenfiguren mit den gewünschten Eigenschaften: Wird zu einem beliebigen Punkt μ auf der Erzeugerfigur eine Achse AT parallel zur Tangente an die Kurve in diesem Punkt μ gezogen, so hat die entsprechende Resektenfigur aufgrund ihrer Definition eine Asymptote in μ. Nach Satz 7 und einem Stetigkeitsargument wie im Beweis von Satz 8 ist dann ${}_2D\,{}_2B\,\mu\lambda\delta\,{}_4D\,{}_3D\,{}_2D$ eine solche der Länge nach unendliche Fläche.

Satz XI.

> Auf unendlich viele Arten schneide man von einer beliebig kleinen krummlinigen Figur einen Teil ab, und stelle eine dem Doppelten von ihm gleiche Figur von unendlicher Länge dar.

Wie klein auch immer die krummlinige Figur sei, so kann jedenfalls auf unendlich viele Arten irgendein Punkt ihrer Kurve ${}_2C\,{}_3C\,{}_4C\,\mu$ (man gehe zu Fig. 3 zurück), gewählt werden, wie μ einer ist, zu dem die Tangente $\mu\lambda$ und zu dieser Tangente die Senkrechte ${}_2B\,\mu$ innerhalb der Figur gezogen werden kann, so dass auf diese Weise von der Figur das rechtwinklige Trilineum ${}_2C\,{}_2B\,\mu\,{}_4C\,{}_3C\,{}_2C$ abgeschnitten werden kann. Ich behaupte, dass eine dem Doppelten von ihm gleiche unendliche Figur dargestellt werden kann, und dass die Art der Darstellung gezeigt werden kann.

Durch irgendeinen Punkt A der, wenn es so gefallen sollte, verlängerten Geraden ${}_4B\,\mu$ möge die Senkrechte AT gezogen werden, die natürlich parallel zur Tangente $\mu\lambda$ ist, und es mögen von den Punkten ${}_3C$ oder ${}_4C$ der Kurve ${}_2C\,\mu$ Tangenten gezogen werden, die AT in den Punkten ${}_3T$ und ${}_4T$ und ähnlichen treffen; auch seien von den Treffpunkten ${}_3T$, ${}_4T$ Lote ${}_3T\,{}_3D$, ${}_4T\,{}_4D$ auf die notfalls verlängerten Ordinaten ${}_3B\,{}_3D$, ${}_4B\,{}_4D$ gefällt, die zur Tangente $\mu\lambda$ parallel sind. Und man denke sich, dass dieses fortlaufend von Punkt ${}_2C$ bis zum Punkt μ geschehen ist, wie in Satz 7. Dann werden wir eine unendliche Fläche ${}_2D\,{}_2B\,\mu\lambda\delta\,{}_4D\,{}_3D\,{}_2D$ haben, die von den beiden endlichen geraden Linien ${}_2D\,{}_2B$ und ${}_2B\,\mu$ und den beiden unendlichen Linien, der einen, der bis ins Unendliche fortschreitenden Kurve ${}_2D\,{}_3D\,{}_4D\,\delta$ und der anderen, der Geraden, der Asymptote $\mu\lambda$ zu ihr, umschlossen ist.

Es ist ferner klar, dass die Kurve ${}_2D\,{}_3D\,{}_4D\,\delta$ unendlich ist, weil die Gerade A ${}_4T$ um so länger sein wird, je weniger ein Punkt wie ${}_4C$ von Punkt μ entfernt sein wird, und wenn deshalb eine endliche gerade Linie gegeben ist, wird man immer einen Punkt wie ${}_4C$ so beschaffen und so nahe dem Punkt μ im Geiste angeben können, dass die Gerade A ${}_4T$ oder die ihr gleiche ${}_4B\,{}_4D$ größer als die gegebene endliche gerade Linie ist, und deshalb wird die Kurve ${}_4D\,\delta$ in Richtung λ ins Unendliche fortschreiten; und immer wird sie zur Geraden $\mu\lambda$ mehr und mehr herabsteigen, je nachdem um wie viel näher bei $\mu\lambda$ ein Punkt wie ${}_4B$, ${}_4C$ oder ${}_4D$ angenommen wird; trotzdem wird sie niemals bei der Geraden $\mu\lambda$ ankommen. Wenn sie nämlich bei ihr in irgendeinem Punkt wie λ ankäme, wäre $\mu\lambda$ die Ordinate an die Kurve, und deshalb träfe sie, wenn es möglich wäre, einen Teil, der gleich dem

Resectae; sed $\mu\lambda$ ipsi AT, sibi parallelae occurrere impossibile est, quare nec recta $\mu\lambda$ uspiam occurret curvae [4D δ] ac proinde erit asymptotos.

Superest ut ostendam spatium longitudine infinitum [2D 2B $\mu\lambda$ etc. δ 4D 3D 2D] aequari duplo trilineo orthogonio 2C 2B μ 3C 2C. Verum hoc non aliter fieri potest, (ne quis hic erret) nisi pro recta $\mu\lambda$ ponatur recta $(\mu)\lambda$. puncto (μ) paulo supra punctum μ sumto, intervallo $(\mu)\mu$ infinite parvo, ita ordinata $(\mu)\lambda$. erit longitudine infinita; major qualibet assignabili 4B 4D, quia etiam ipsa $\mu(\mu)$ quolibet assignabili intervallo μ 4B minor est. Proinde $(\mu)\lambda$ non erit curvae D δ asymptotos, sed ei occurrens alicubi ut in λ, licet λ absit infinito abhinc intervallo. Id est recta $(\mu)\lambda$ erit quidem infinita, sive quavis designabili major, sed non interminata. Hoc posito utique ex prop. 7. spatium [2D 2B $(\mu)\lambda\delta$ 4D 3D 2D], infinitae baseos $(\mu)\lambda$ ipsius finiti [2C 2B μ 4C 3C 2C] duplum erit. Generalis enim est propositio 7. nec longitudinem aut brevitatem linearum moratur.[i]

Scholium (Variante)

Memorabilis est contemplatio de spatiis longitudine infinitis magnitudine tamen finitis. Veteribus, quod sciam, nihil tale innotuit, et satis ipsis mirum videbatur, esse quasdam rectas asymptotos, quae magis magisque ad curvam accederent, nunqam tamen ad eam pervenirent. Primus, ut puto, Torricellius solidum Hyperbolicum acutum longitudine infinitum dimensus est, et ad cylindrum quendam finitum reduxit:[45] in plano P.

[i] *Am Rande*: Aliter demonstrandum quod neque majus quia non potest inveniri pars ejus finita aequalis. Nec minor quia nec pars alterius ipsi aequalis. Idem fieri potest infinitis modis[,] infiniti pars finita assumi potest dato finito major.[44]

[44] Hatte Galilei aus dem Paradox der Quadratzahlen wie Grégoire de St. Vincent im Zusammenhang mit dem Kontingenzwinkel gefolgert, dass im Unendlichen das Ganze nicht grösser sei als ein echter Teil, zeigt Leibniz in der *Historia et origo*, dass er dieses „große Axiom“ aus der Definition „Wenn nämlich von zwei Dingen das eine gleich dem Teil des anderen ist, wird jenes kleiner, dieses größer genannt“ und dem Prinzip der Identität für ableitbar hält.[LMG V, 395] Da eine unendliche Menge nach Dedekinds Unendlichkeitsdefinition aber immer bijektiv auf eine echte Teilmenge abgebildet werden kann, wird die Einführung des Aktual-Unendlichen in die Mathematik von Leibniz mit der im Folgenden genauer ausgeführten Unterscheidung zwischen unbegrenzten und unendlichen Linien vermieden.

[45] Diese Transformation des aus der Drehung der gleichseitigen Hyperbel um die eine Asymptote entstandenen Rotationskörpers veröffentlichte Torricelli 1644 als *De solido acuto hyperbolico* in seinen *Opera Geometrica*. Zur philosophischen Rezeption von Torricellis unendlichem Körper im dritten Viertel des 17. Jahrhunderts siehe [Mancosu/Vailati 1991].

von AT durch die Tangente in μ, d.h. durch $\mu\lambda$ selbst, abgeschnittenen AT bzw. der Resekte ist; aber es ist unmöglich, dass $\mu\lambda$ die Parallele AT zu ihr trifft, und deshalb wird die Gerade $\mu\lambda$ nirgendwo die Kurve 4D δ treffen und wird daher eine Asymptote sein.

Ich habe noch zu zeigen, dass die der Länge nach unendliche Fläche 2D 2B $\mu\lambda$ etc. δ 4D 3D 2D gleich dem doppelten rechtwinkligen Trilineum 2C 2B μ 3C 2C ist. Das kann aber nur geschehen (damit hier niemand irrt), wenn anstatt der Geraden $\mu\lambda$ eine Gerade $(\mu)\lambda$ gesetzt wird. Wenn ein wenig oberhalb von Punkt μ ein Punkt (μ) mit einem unendlich kleinen Intervall $\mu(\mu)$ gewählt ist, wird auf diese Weise die Ordinate $(\mu)\lambda$ der Länge nach unendlich sein; sie ist größer als eine beliebige angebbare 4B 4D, weil auch $\mu(\mu)$ kleiner ist als ein beliebiges angebbares Intervall μ 4B. Daher wird $(\mu)\lambda$ nicht Asymptote der Kurve D δ sein, sondern sie irgendwo, z.B. bei λ, treffen, obgleich λ von hier durch ein unendliches Intervall entfernt ist. Das heißt, die Gerade $(\mu)\lambda$ wird zwar unendlich bzw. größer als eine beliebige angebbare sein, aber nicht unbegrenzt. Unter dieser Voraussetzung wird jedenfalls nach Satz 7 die Fläche 2D 2B $(\mu)\lambda\delta$ 4D 3D 2D mit der unendlichen Grundlinie $(\mu)\lambda$ das Doppelte der endlichen 2C 2B μ 4C 3C 2C sein. Der Satz 7 ist nämlich allgemein, und er stößt sich nicht an der Länge oder Kürze von Linien.[i]

Scholium (Variante)

Erwähnenswert ist eine Betrachtung über der Länge nach unendliche, der Größe nach jedoch endliche Flächen. Den Alten, soweit ich weiß, wurde nichts Derartiges bekannt, und es erschien ihnen erstaunlich genug, dass es gewisse asymptotische Geraden gibt, die sich mehr und mehr an eine Kurve annähern und dennoch niemals bei ihr ankommen. Als erster, wie ich glaube, hat Torricelli den der Länge nach unendlichen spitzen hyperbolischen Körper gemessen und auf einen gewissen endlichen Zylinder

[i] *Am Rande*: Es muss anders bewiesen werden, dass sie weder größer ist, weil kein Teil von ihr gefunden werden kann, der der endlichen Fläche gleich ist, noch kleiner, weil es auch keinen Teil der anderen gibt, der ihr selbst gleich ist. Dasselbe kann auf unendlich viele Arten geschehen, es kann ein endlicher Teil der unendlichen Fläche angenommen werden, der größer ist als die gegebene endliche.

Gregorius a S. Vincentio spatium infinitum inter duas Hyperbolas certa ratione comprehensum quadravit[46], et vir suo merito celeberrimus, Christianus Hugenius, spatium cissoidale infinitum ad circulum revocavit.[47] Et Geometra eximius, Joh. Wallisius ostendit quomodo innumerae sint Hyperboloides, quarum area, licet longitudine infinita, possit inveniri[48], et quomodo possint illae ab aliis, quae id non patiuntur, probabili ratione discerni, quod quanquam inductione utatur, plurimum tamen ingenii habet, adde infra prop. 22. ubi demonstravimus. Nobis propositio septima viam dedit, cujuslibet curvae datae segmento cuidam vel sectori, utcunque parvo, duplicato, infinitis modis, figuras longitudine infinitas exhibendi aequales. Quod aliis etiam rationibus fieri posse non ignoramus.

Caeterum ingenuitas nostra non patitur ut dissimulemus, non esse ista tam mira, quam hominibus primo aspectu videntur. R. P. Pardies e Societate Jesu, scriptis elegantibus notus eruditis, ac vita longiore dignus[49], tantum hujusmodi meditationibus tribuebat, ut crederet efficax satis argumentum praebere ad evincendam animae immaterialitatem quemadmodum in compendii Geometrici praefatione asseruit.[50] Mihi videtur ipsam per se naturam mentis, et operationes, praesertim quibus in se revertitur, sufficere ut a corpore, sive a re duobus tantum praedita, extensione scilicet, et massa, distinguatur.[51] Quanquam non negem singulares quasdam operationes caeteris, saltem apparere, mirabiliores; quas plus valere si non ad probandum, certe ad persuadendum, non abnuerim. Quod hanc vero attinet mentis actionem qua spatia infinita metimur, ea nihil extraordinarium continet, cum fictione quadam nitatur, et supposita quadam linea

[46]siehe [Gregorius 1647, Buch VI, Sätze 131-135, S. 597-601]

[47]Die Zissoide ist eine Kurve dritter Ordnung mit der Gleichung $x^3 + (x - 2R)y^2 = 0$. Sie wurde von Diokles (um 100 v. Chr.) als Hilfsmittel zur Lösung des Problems der Würfelverdoppelung eingesetzt. TODO: Knorr 1988, The Ancient Tradition, S. 246f. Huygens verfasste seine Zissoidenquadratur im April 1658 [HO II, Nr. 483] und schickte sie zwischen dem 6.9.1658 und 31.1.1659 an Wallis. Wallis veröffentlichte diese Mitteilung in [Wallis 1669/71 = WO I, S. 906-908].

[48]Wallis erweitert in Satz 101 Scholium bis Satz 107 Scholium der *Arithmetica infinitorum* von 1655 Torricellis Resultat auf die unbegrenzten und dennoch endlichen Flächen der höheren Hyperbeln in der Ebene, die Leibniz in Satz 22 untersucht, sowie die verallgemeinerten Rotationshyperboloide.[WO I, 407-412]

[49]Pardies erlag am 22.4.1673 im Alter von 37 Jahren einem Fieber.

[50]Zu diesen in den *Elémens de géometrie* von 1671 ausgeführten Überlegungen siehe [Knobloch 1990, 39].

[51]Leibniz folgt hier der Cartesianischen Trennung von Geist und Materie und der Identifikation von Materie mit Ausdehnung und Masse.

zurückgeführt. Pater Grégoire de St. Vincent hat eine in der Ebene gelegene unendliche Fläche quadriert, die zwischen zwei Hyperbeln in einer bestimmten Weise eingeschlossen ist, und der durch sein Verdienst hochberühmte Christiaan Huygens führte die unendliche Zissoidenfläche auf einen Kreis zurück. Und der hervorragende Geometer John Wallis zeigte, wie zahllos die Hyperboloide sind, deren Flächeninhalt, wenn auch bei unendlicher Länge, gefunden werden kann, und wie jene von anderen, die das nicht zulassen, durch eine wahrscheinliche Methode unterschieden werden können, weil sie, obwohl sie die Induktion benutzt, trotzdem ein Höchstmaß an Scharfsinn hat. Füge unten Satz 22 hinzu, wo wir es bewiesen haben. Uns hat der siebte Satz einen Weg angegeben, auf unendlich viele Arten der Länge nach unendliche Figuren als gleich einem gewissen verdoppelten beliebig kleinen Segment oder Sektor einer beliebigen gegebenen Kurve nachzuweisen. Dass das auch mit anderen Methoden geschehen kann, wissen wir wohl.

Übrigens duldet es unsere Aufrichtigkeit nicht zu verschweigen, dass jene Dinge nicht so erstaunlich sind, wie sie den Menschen beim ersten Anblick erscheinen. Der ehrwürdige Pater Pardies von der Gesellschaft Jesu, den Gelehrten durch elegante Schriften bekannt und eines längeren Lebens würdig, schrieb derartigen Überlegungen ein so großes Gewicht zu, dass er glaubte, ein ausreichend wirksames Argument zu liefern, um die Materielosigkeit der Seele nachzuweisen, wie er im Vorwort des geometrischen Kompendiums behauptet hat. Mir scheint, dass durch sich selbst die Natur des Geistes und die Operationen, zumal diejenigen, durch die er auf sich zurückverweisen wird, ausreichen, dass er vom Körper bzw. von der Sache unterschieden wird, die nur mit zweierlei versehen ist, der Ausdehnung nämlich und der Masse. Jedoch mag ich nicht leugnen, dass gewisse besondere Operationen bewundernswerter als die übrigen wenigstens erscheinen; dass diese, wenn nicht zum Beweisen, wenigstens zum Überzeugen geeigneter sind, möchte ich nicht bestreiten. Was aber diejenige Tätigkeit des Geistes betrifft, mit der wir unendliche Flächen messen, so enthält sie nichts Außergewöhnliches, weil sie sich auf eine gewisse Fiktion stützt und unter der Voraussetzung einer gewissen, zwar terminata quidem, infinita tamen, nullo negotio procedat, unde non plus habet difficultatis, quam si finitum longitudine spatium metiremur.

Magis mirarer, si quis ipsum spatium absolute interminatum inter curvam atque perfectam asymptoton interjectum; ad finitum spatium reducere posset. Sed tale nihil mihi innotuit, credo nec aliis, adde tamen prop. 14. coroll. Quoniam vero paradoxa quibusdam haec locutio videbitur, de Lineis quae infinitae, non tamen interminatae sint: Ideo admonendum est, quemadmodum plurimum interest inter indivisibile et infinite parvum; ita longam esse differentiam inter infinitum et interminatum. Fallax est indivisibilium Geometria, nisi de infinite parvis explicetur; neque enim puncta vere indivisibilia tuto adhibentur, sed lineis utendum est, infinite quidem parvis, lineis tamen, ac proinde divisibilibus.[52] Eodem plane modo quantitas interminata differt ab infinita. Nam lineae interminatae magnitudo nullo modo Geometricis considerationibus subdita est, non magis quam puncti. Quemadmodum enim puncta, licet numero infinita, frustra adduntur aut subtrahuntur lineae terminatae[53], ita linea terminata, quotcunque licet vicibus repetita interminatam facere aut exhaurire non potest. Quod secus est in linea terminata quidem, infinita tamen, quae aliqua linearum finitarum multitudine constituta intelligitur tametsi multitudo haec omnem numerum excedat. Et quemadmodum linea infinita terminata componitur ex finitis, ita finita linea componitur ex infinite parvis sed divisibilibus tamen. Hinc dici non potest Lineam terminatam esse proportione mediam inter punctum seu lineam minimam, et intermi-

[52] Eine Aufzeichnung aus der Zeit Herbst 1672 - Winter 1672/73 [LSB VI 3, 97-101] zeigt einen Versuch von Leibniz, die Existenz von Indivisibeln mathematisch zu widerlegen. Einerseits muss die Diagonale eines Quadrats ebenso viele Indivisiblen haben wie eine Seite, da jeder Punkt der Diagonale sich durch Fällen eines Lots mit je einem Punkt der Seite verbinden lässt. Andererseits ist die Diagonale länger als die Seite und muss daher mehr Indivisiblen haben. Also führen Indivisiblen in Widersprüche. [TODO: Breger 1990, 59]

[53] Cavalieri selbst hielt sich an das Prinzip *indivisibile indivisibili additum non facit maius* und war deshalb zurückhaltend mit Aussagen zum Aufbau des Kontinuum. Zwar verwendet er das Bild, wonach ein Buch aus parallelen Seiten aufgebaut ist, fügt aber umgehend hinzu, dass die Seiten eines Buches im Gegensatz zu den Indivisibeln stets eine endliche Dicke haben.[TODO: Anderson 1986, 19] Spätere Autoren wie John Wallis legten diese Zurückhaltung ab: „It is understood that any continuum (according to the Geometry of Indivisibles of Cavalieri) consists of an infinite number of indivisibles. As from an infinity of points, a line; a surface from an infinity of lines; and a solid from an infinite number of surfaces; so also time from an infinity of temporal moments, etc.“ [WO I, 645, TODO: Übersetzung nach Jesseph 1999, 174]

begrenzten, jedoch unendlichen Linie ohne jede Mühe voranschreitet; daher hat sie keine größere Schwierigkeit, als würden wir eine der Länge nach endliche Fläche messen.

Ich würde mich mehr wundern, wenn jemand eine vollkommen unbegrenzte Fläche selbst, die zwischen einer Kurve und einer vollendeten Asymptote liegt, auf eine endliche Fläche zurückführen könnte. Aber derartiges ist mir nicht bekannt geworden – ich glaube, anderen auch nicht. Füge trotzdem das Korollar von Satz 14 hinzu. Da nun aber einigen dieses Reden über Linien, die unendlich, jedoch nicht unbegrenzt sind, paradox erscheinen wird, muss daran erinnert werden, dass der Unterschied zwischen dem Unendlichen und dem Unbegrenzten so groß ist, wie es einen überaus großen Unterschied zwischen dem Indivisibilie und dem unendlich Kleinen gibt. Täuschend ist die Geometrie der Indivisibeln, wenn sie nicht hinsichtlich des unendlich Kleinen erklärt wird. Denn die wahrhaft unteilbaren Punkte werden nicht gefahrlos verwendet, sondern man muss Linien benutzen, zwar unendlich kleine, aber dennoch Linien und deshalb teilbare. Auf die völlig gleiche Art unterscheidet sich eine unbegrenzte Quantität von einer unendlichen. Denn die Größe einer unbegrenzten Linie unterliegt auf keine Art den geometrischen Betrachtungen mehr als die eines Punktes. Wie nämlich Punkte, sogar von unendlicher Anzahl, vergeblich zu einer begrenzten Linie addiert und von ihr subtrahiert werden, so kann eine begrenzte Linie eine unbegrenzte weder bilden noch ausschöpfen, wie viele Male auch immer sie wiederholt wurde. Das ist anders bei einer zwar begrenzten, jedoch unendlichen Linie, die durch irgendeine Menge von endlichen Linien erzeugt gedacht wird, obgleich diese Menge jede Zahl überschreitet. Und wie eine begrenzte unendliche Linie aus endlichen zusammengesetzt wird, so wird eine endliche Linie aus unendlich kleinen, aber dennoch teilbaren zusammengesetzt. Daher kann nicht gesagt werden, dass eine begrenzte Linie die mittlere Proportionale zwischen einem Punkt bzw. einer kleinsten Linie und einer unbegrenzten natam seu lineam maximam. At dici potest lineam finitam esse mediam proportione, non quodammodo, sed vere exacteque inter quandam infinite parvam et quandam infinitam; et verum est rectangulum sub linea infinita et infinite parva cuidam finito quadrato aequale esse posse; idque in Hyperbola Conica reapse contingit. Nam si curva $_4D\delta\lambda$ esset Hyperbolica, cujus centrum sit μ et abscissa aliqua infinite parva sit $\mu(\mu)$, foret ordinata utique infinite longa $(\mu)\lambda$ major scilicet qualibet recta designabili et rectangulum infinitum $\mu(\mu)\lambda$ sub infinita et infinite parva comprehensum, ex natura Hyperbolae quadrato cuidam constanti finito aequale esset.[54] Interminatum itaque voco in quo nullum punctum ultimum sumi potest, saltem ab una parte. Infinitum vero, quantitatem sive terminatam, sive interminatam, modo qualibet a nobis assignabili, numerisve designabili, majorem intelligamus.[55] An autem hujusmodi quantitates ferat natura rerum Metaphysici est disquirere; Geometrae sufficit, quid ex ipsis positis sequatur, demonstrare.

Scholium

Constitutis Propositionibus generalibus ad Specimina Methodi descendere tempus est: qualia in Cycloide, aliisque curvis, sed potissimum in Circulo habemus, cujus causa totam hanc tractationem suscepimus. Quoniam autem nostra Circuli Quadratura requirit Quadraturas Paraboloidum; itaque ubi paucis Cycloidem ac figuram Angulorum attigerimus (quoniam ex his nihil in sequentia redundat) ad Paraboloides et Hyperboloides quadrandas accedemus, et ad Quadraturam Circuli gradum struemus.

[54] siehe Satz 21

[55] Die Unterscheidung zwischen dem Unendlichen und dem Unbegrenzten wurde von Descartes eingeführt, um das Undenkbare – die Unendlichkeit, die nur Gott zukommt – vom Denkbaren – eine Linie, die immer weiter verlängert werden kann – zu trennen. „26. Qu'il ne faut point tascher de comprendre l'infiny, mais seulement penser que tout ce en quoi nous ne trouuons aucunes bornes est indefiny. Ainsi nous ne nous embarrasserons jamais dans les disputes de l'infiny; d'autant qu'il seroit ridicule que nous, qui sommes finis, entreprissions d'en determiner quelque chose, [...].“ [DO IX, 36] Dazu schreibt Leibniz: „Even though we are finite, we can yet know many things about the infinite: ... about spaces which are infinite in length but not greater in area than a given finite space, and about the sums of infinite series. Otherwise we should also not know nothing with certainty about god.“ [TODO: siehe Loemker, S. 387]

bzw. größten Linie ist. Aber es kann gesagt werden, dass eine endliche Linie die mittlere Proportionale nicht nur gewissermaßen, sondern wirklich und genau zwischen einer gewissen unendlich kleinen und einer gewissen unendlichen ist; und es ist wahr, dass ein Rechteck unter einer unendlichen und einer unendlich kleinen Linie gleich einem gewissen endlichen Quadrat sein kann. Und das trifft bei der Kegelschnitthyperbel in der Tat zu. Wenn nämlich die Kurve $_4D\ \delta\lambda$ eine hyperbolische wäre, deren Zentrum μ sei und von der irgendeine unendlich kleine Abszisse $\mu(\mu)$ sei, würde die Ordinate $(\mu)\lambda$ jedenfalls unendlich lang, nämlich größer als eine beliebige angebbare Gerade sein, und das unendliche Rechteck $\mu(\mu)\lambda$, das unter der unendlichen und unendlich kleinen Geraden umschlossen ist, wäre aufgrund der Hyperbelnatur gleich einem gewissen endlichen festen Quadrat. Unbegrenztes nenne ich deshalb dasjenige, bei dem wenigstens auf einer Seite kein letzter Punkt genommen werden kann, Unendliches aber eine Quantität, sei sie begrenzt oder unbegrenzt, wenn wir sie nur größer als eine beliebige von uns zuweisbare oder durch Zahlen angebbare denken. Zu untersuchen, ob aber die Natur der Dinge derartige Quantitäten erträgt, ist Sache des Metaphysikers; für den Geometer genügt es zu beweisen, was aus den Voraussetzungen selbst folgt.

Scholium

Nachdem die allgemeinen Sätze aufgestellt wurden, ist es Zeit, zu den Beispielen der Methode herabzusteigen. Derartige haben wir in der Zykloide und in anderen Kurven, vor allem aber im Kreis, um dessen willen wir diese ganze Abhandlung verfasst haben. Weil nun aber unsere Kreisquadratur die Quadraturen der Paraboloide erfordert, werden wir uns deshalb, sobald wir uns mit wenigen Worten mit der Zykloide und der Winkelfigur befasst haben werden (da sich ja aus ihnen nichts für das Folgende ergibt), den zu quadrierenden Paraboloiden und Hyperboloiden zuwenden und eine Stufe zur Kreisquadratur errichten.

Definitio

Retortam Cycloidis voco bicurvilineum (fig. 4.) A 1B 2B 2C 1C A, arcu aliquo cycloidis, A 1C 2C, arcu A 1B 2B circuli generatoris (diametrum AG in axe cycloidis, verticem A in ejus vertice habentis) ac denique ordinatae cycloidis ad axem AF, portione 2B 2C, (differentia nempe ordinatae cycloidis FBC, et circuli FB) comprehensum.

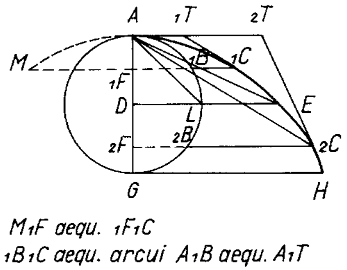


fig. 4

PROPOSITIO XII.

> Quaelibet retorta cycloidis segmenti eodem cycloidis arcu, et recta a vertice subtensa comprehensi duplum est.

In eadem figura 4. ajo retortam quamcunque, ut A 1B 2B 2C 1C A esse duplam segmenti respondentis A 2C 1C A, comprehensi curvae cycloidis portione A 1C 2C, et subtensa a vertice A 2C. Ex puncto C ad rectam AT per verticem A transeuntem plano GH super quo circulus cycloidem generans incessit, parallelam ducatur tangens CT, idque in quolibet curvae puncto factum intelligatur. Constat ex iis quae apud doctissimos de Cycloide scriptores habentur[56], AT esse ipsi BC semper aequalem.[57] Jam summa omnium

[56] In der Variante zum Beweis von Satz 13 werden Fabri, Wallis, Pascal und Huygens genannt.

[57] Sei G′ der Rollpunkt auf der Geraden GH des Erzeugerkreises zum Punkt C. Entscheidend ist die Beobachtung, dass die Gerade durch G′C – da die Zykloidenkurve in der Umgebung von C durch eine infinitesimale Drehung von C um G′ erzeugt wird – die Normale zur Zykloide in diesem Punkt bildet. Da die Zykloidentangente rechtwinklig zur Normalen steht, wird G′CT ein rechtwinkliges Dreieck sein. Da T nach Voraussetzung zudem auf der Parallelen durch A zu GH liegt, muss TG′ der Durchmesser des Erzeugerkreises parallel zu AG sein. Der Tangentenschnittpunkt T ist also der Scheitel

Definition

Zykloidenretorte nenne ich die doppelt krummlinige Fläche (Fig. 4) A 1B 2B 2C 1C A, die von einem Zykloidenbogen A 1C 2C, dem Bogen A 1B 2B des Erzeugerkreises (der den Durchmesser AG auf der Zykloidenachse, den Scheitel A in ihrem Scheitel hat) und schließlich von dem Teil 2B 2C der Zykloidenordinate an die Achse AF (nämlich der Differenz zwischen der Ordinate FBC der Zykloide und des Kreises FB) umschlossen ist.

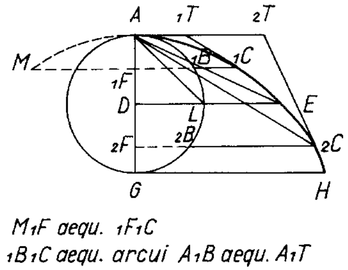


fig. 4

Satz XII.

> Eine beliebige Zykloidenretorte ist das Doppelte des Segments, das von demselben Zykloidenbogen und der vom Scheitel aus darunter gespannten Geraden umschlossen ist.

Ich behaupte, dass in derselben Figur 4 eine beliebige Retorte, z.B. A 1B 2B 2C 1C A doppelt so groß ist wie das entsprechende Segment A 2C 1C A, das vom Teil A 1C 2C der Zykloidenkurve und der vom Scheitel aus darunter gespannten Geraden A 2C umschlossen ist. Vom Punkt C möge die Tangente CT zur Geraden AT gezogen werden, die durch den Scheitel A hindurchgeht und parallel zu der Ebene GH liegt, über welcher der Kreis die Zykloide erzeugend vorgerückt ist, und das denke man sich in einem beliebigen Punkt der Kurve getan. Aufgrund dessen, was man bei den gelehrtesten Autoren über die Zykloide vorfindet, steht fest, dass AT immer gleich BC ist. Nun ist die Summe aller A 1T, A 2T oder anderer an

A 1T, A 2T, aliarumve ad axem A 1F 2F applicatarum vel in 1B 1C, 2B 2C, aliasve, translatarum, aequatur duplo segmento A 2C 1C A per prop. 8. nihil enim refert an axem ipsum attingant applicatae, an vero aliter utcunque in ordinatis, (1F 1C, 2F 2C, aliisve) sumantur, nempe an transferantur in 1B 1C, 2B 2C. Semper enim eadem manet summa applicatarum, sive area figurae, quemadmodum toties ostensum est ab aliis, et severe demonstrari posset, ex illis quae prop. 6. diximus.[58] Spatium ergo ex omnibus AT in respondentes BC translatis, conflatum, seu retorta A 1B 2B 2C 1C A, aequatur duplo segmento A 2C 1C A.

Scholium

Hoc theorema quanquam singulare et per totam cycloidem obtinens nondum apud doctissimos de cycloide scriptores extare arbitror. Porro quoniam segmentum cycloidis ut ostendimus aequatur dimidio Retortae cycloidalis; ea autem ex arcubus ad axem applicatis conflatur; (est enim recta 1B 1C aequalis arcui A 1B; et recta 2B 2C aequalis arcui AL 2B) ideo patet segmentum cycloidis esse dimidium summae arcuum ad diametrum applicatorum, seu ut quidam vocant, figurae arcuum, cujus curva coincidit cum curva lineae sinuum versorum[59] [,] adde infra prop. [48]. Ideo quae circulo est linea sinuum versorum, ea cycloidi est linea segmentorum. Alia quae ex hoc theoremate duci possent nunc omitto; excepta tantum propositione memorabili, quae jam sequetur.

PROPOSITIO XIII.

> Si recta per centrum circuli generatoris ducta, plano provolutionis parallela, cycloidi occurrat; recta alia punctum occursus cum vertice cycloidis jungens segmentum abscindet a cycloide, quod erit absolute quadrabile

des Erzeugerkreises durch G′ und C. Da sich der Erzeugerkreis bei der Bewegung von G nach G′ um den Winkel ADB dreht, ist er dabei um die Strecke BC = GG′ = AT, deren Länge gleich der des Kreisbogens AB ist, vorgerückt. Leibniz konnte diese Aussagen dem *Horologium oscillatorium* von Huygens entnehmen [LSB III, 1, 115].

[58] Diese Translations- und Scherungsinvarianz folgt unmittelbar aus Cavalieris Prinzip, wonach zwei Flächen den gleichen Inhalt haben, wenn die Längen einander entsprechender Schnitte durch diese beiden Figuren jeweils gleich sind.

[59] sinus versus(φ) = 1 − cos(φ)

die Achse A 1F 2F angelegter Geraden, die zum Beispiel auf 1B 1C, 2B 2C oder andere übertragen wurden, nach Satz 8 dem doppelten Segment A 2C 1C A gleich. Denn es kommt nicht darauf an, ob die angelegten Geraden die Achse selbst berühren oder aber irgendwie anders auf den Ordinaten (1F 1C, 2F 2C oder anderen) genommen werden, ob sie nämlich nach 1B 1C, 2B 2C übertragen werden. Denn die Summe der angelegten Geraden bzw. der Flächeninhalt der Figur bleibt immer gleich, wie es von anderen so oft gezeigt wurde und streng aufgrund von jenem bewiesen werden könnte, was wir in Satz 6 gesagt haben. Also ist die Fläche, die aus allen zu den entsprechenden BC übertragenen AT zusammengebracht ist bzw. die Retorte A 1B 2B 2C 1C A dem doppelten Segment A 2C 1C A gleich.

Scholium

Ich glaube, dass dieser Satz, obwohl einzigartig und für die ganze Zykloide gültig, bei den gelehrtesten Autoren über die Zykloide noch nicht vorhanden ist. Da nun ferner das Zykloidensegment, wie wir gezeigt haben, gleich der halben Zykloidenretorte ist, diese aber aus den an die Achse gelegten Bögen zusammengebracht wird (denn die Gerade 1B 1C ist gleich dem Bogen A 1B und die Gerade 2B 2C ist gleich dem Bogen A L 2B), ist also klar, dass das Zykloidensegment die Hälfte der Summe der an den Durchmesser angelegten Bögen ist, bzw., wie einige sagen, der Figur der Bögen, deren Kurve mit der Kurve der Linie der inversen Sinusse zusammenfällt. Füge unten Satz 48 hinzu. Was daher für den Kreis die Linie der inversen Sinusse ist, das ist für die Zykloide die Linie der Segmente. Anderes, was aus diesem Satz abgeleitet werden könnte, lasse ich nun unerwähnt, nur mit Ausnahme des erwähnenswerten Satzes, der jetzt folgen wird.

Satz XIII.

> Wenn eine Gerade, die durch den Mittelpunkt des Erzeugerkreises gezogen wird und parallel zur Rollebene liegt, die Zykloide trifft, wird eine andere Gerade, die den Treffpunkt mit dem Zykloidenscheitel verbindet, ein Segment von der Zykloide abschneiden, das absolut qua-

sine supposita circuli Quadratura;[60] et quidem aequale semiquadrato radii circuli generatoris.[61]

In eadem figura 4. per D. centrum circuli generatoris ALG ducatur recta DE, plano provolutionis GH parallela, cycloidi occurrens in E. Jungatur vertex A. puncto occursus E. per rectam AE, ajo segmentum AE 1C A absolute quadrari posse, et aequari semiquadrato radii seu triangulo ADL. Hoc ita probatur:

spatium ADE 1C A aequal. segmento cycloidis AE 1C A + Triangulo ALE + Triangulo ADL

Triangulo inquam ALE, id est Quadranti ADL1BA, quoniam ejus Trianguli altitudo A[D] est radius, et basis LE est arcus quadrantis.

Rursus spatium ADE 1CA aequal. Quadranti ADL 1BA + Retortae cycl. A 1BLE 1CA

id est per prop. 12. segmento cycloidali AE 1CA, duplicato

Ergo duos valores ejusdem spatii ADE 1C aequando inter se, et utrobique auferendo semel segmentum cycloidale et quadrantem; restabunt illic Triangulum ADL hic segmentum cycloidale AE 1CA, aequalia inter se. Q.E.D.

[60] Diese Äusserung bezieht sich auf das bekannte Resultat von Roberval, Torricelli oder auch Fabri [Fellmann 1992, 103], wonach die von der gesamten Zykloide umfasste Fläche gleich dem Dreifachen des erzeugenden Kreises ist. Die Zykloidenquadratur setzt also die Kreisquadratur voraus, die auch in Pascals Aufruf als gegeben vorausgesetzt wird: „Dans tous lesquels problèmes je suppose la quadrature du cercle où il est nécessaire de la supposer" [TODO: Lafuma, 122].

[61] Leibniz teilt dieses Ergebnis im Sommer 1674 an Huygens mit [LSB III, 1, N. 29]. Veröffentlicht ist das Resultat im *Journal des sçavans* vom Mai 1678 [TODO: LSB III, 2, N. 158]. Um die Transmutationsmethode nicht preisgeben zu müssen, greift er dort statt auf Satz 12 wie in der folgenden Variante des Beweises auf ein Ergebnis von Fabri zurück, wonach die Fläche dieser speziellen Zykloidenretorte ALE gleich dem Quadrat des Radius AD ist.

drierbar ist, ohne die Quadratur des Kreises vorauszusetzen; und zwar ist es dem halben Quadrat des Radius des Erzeugerkreises gleich.

In derselben Figur 4 möge durch den Mittelpunkt D des Erzeugerkreises ALG die Gerade DE gezogen werden, die parallel zur Rollebene GH ist und die Zykloide in E trifft. Der Scheitel A möge mit dem Treffpunkt E durch die Gerade AE verbunden werden. Ich behaupte, dass das Segment AE 1C A absolut quadriert werden kann und dem halben Quadrat des Radius oder dem Dreieck ADL gleich ist. Das wird so bewiesen:

Die Fläche ADE 1C A ist gleich dem Zykloidensegment AE 1C A + dem Dreieck ALE + dem Dreieck ADL

Dem Dreieck ALE, sage ich, d.h. dem Quadranten ADL1BA, da ja die Höhe AD dieses Dreiecks der Radius und die Grundlinie LE der Bogen des Quadranten ist.

Andererseits ist die Fläche ADE 1CA gleich dem Quadranten ADL 1BA + der Zykloidenretorte A1BLE 1CA

d.h. nach Satz 12 dem verdoppelten Zykloidensegment AE 1CA

Indem wir also die beiden Werte derselben Fläche ADE 1C einander gleichsetzen und von jeder der beiden einmal das zykloidische Segment und den Quadranten abziehen, werden dort das Dreieck ADL und hier das zykloidische Segment AE 1CA übrig bleiben und einander gleich sein. Das war zu beweisen.

Beweis von Satz XIII, 1. Variante

[756 f.] hoc segmentum cycloidis duplicatum aequatur retortae A 1BLE 1CA per prop. [12.][i] at haec retorta aequatur quadrato radii AD, quae propositio diserte habetur apud R. P. Fabry opusculo eleganti de Linea sinuum et cycloide, (quod synopsi Geometriae Lugduni editae adjectum est,) prop. 24. num. 3.[62] Quanquam obiter tantum ab eo ostendatur, ad tertiam quam exhibet cycloidis dimensionem absolvendam. Nescio an non et apud Clarissimum Wallisium extet, neque enim nunc opus ejus integrum percurrere vacat;[63] illud certum est ex ejus pariter et Pascalii[64] traditis manifeste sequi. Quoniam ergo segmentum duplicatum retortae (ex nostris prop. 12.), retorta quadrato radii aequatur; hinc etiam potuisset ostendi segmentum hoc cycloidis dimidio quadrato radii, seu segmentum obliquum AE 1CA, triangulo ADL aequale esse. Q. E. D.

Scholium

Primus omnium spatium aliquod solis rectis et curva cycloidis comprehensum absolute dimensus est Hugenius. Nam posito A 1F esse semiradium, invenit duplum trilinei cycloidalis A 1F 1CA, seu segmentum rectum M 1CAM, aequari dimidio hexagono regulari in circulo generatore[65], descripto, quemadmodum memorat Pascalius in historia insignium de cycloide inventorum, quam exigua scheda complexus est.[66] Ab eo tempore nemo

[i] *geändert aus*: 10

[62](Fabri 1669, 385) = (Fabri 1659, Satz 24, Nr.3)

[63]Wallis hat zwei Werke verfasst, in denen er sich ausführlich mit der Zykloide befasst: [Wallis 1659 = WO I, 489-541. TODO: Vorwort bzgl. Priorität Wren, 495] und [Wallis 1669/71]. In Leibniz' Veröffentlichung im *Journal des sçavans* wird für die Fläche der speziellen Zykloidenretorte nicht nur auf Fabri sondern auch auf Antoine de Lalouvere, Wallis und Philippe de La Hire verwiesen.

[64]*Traitté général de la Roulette*, in: (Pascal 1658 b = PO IX, 116-133)

[65]Huygens beschäftigte sich nach Pascals Aufruf mit der Zykloide und fand im Juli 1658 dieses Resultat [HO XIV, 349/50 (TODO: oder 350/51)]. Am 25.7.1658 ging der Satz an I. Boulliau.

[66]*Hist. Cycl.* [PO VIII, 202; TODO: vgl. auch PO VIII, 151 und PO IX, 159.]. Darin teilt Pascal auch Wrens Quadratur und als grosse Neuigkeit dessen Rektifikation der Zykloide mit. „Mais entre tous les écrits qu'on a receus de cette sorte, il n'y a rien de plus beau que ce qui a esté envoyé par M. Wren; car outre la belle maniere qu'il donne de mesurer le plan de la Roulette, il a donné la comparaison de la ligne courbe mesme et de ses parties

Beweis von Satz XIII, 1. Variante

[756 f.] Dieses verdoppelte Segment der Zykloide ist nach Satz 12 gleich der Retorte A 1BLE 1CA. Aber diese Retorte ist gleich dem Quadrat des Radius' AD; diesen Satz erhält man wohl formuliert bei dem ehrwürdigen Pater Honoré Fabri in der eleganten kleinen Schrift über die Sinuslinie und die Zykloide (die der in Lyon herausgegebenen Synopse der Geometrie angefügt ist) als Satz 24, Nr. 3. Er wird jedoch nur nebenbei von ihm gezeigt, um die dritte Ausmessung der Zykloide zu lösen, die er darstellt. Ich weiß nicht, ob er nicht auch bei dem hoch berühmten Wallis vorhanden ist, denn es ist jetzt keine Zeit vorhanden, sein ganzes Werk durchzugehen. Es ist sicher, dass jenes aus seinen überlieferten Schriften ebenso wie aus denen von Pascal offenbar folgt. Da nun also das verdoppelte Segment der Retorte (nach unseren [Worten] in Satz 12), die Retorte dem Quadrat des Radius gleich ist, hätte man von hier aus auch zeigen können, dass dieses Zykloidensegment der Hälfte des Quadrates vom Radius bzw. dass das schräge Segment AE 1CA dem Dreieck ADL gleich ist. Das war zu beweisen.

Scholium

Als erster von allen hat Huygens irgendeine Fläche absolut ausgemessen, die von Geraden allein und der Zykloidenkurve umschlossen ist. Unter der Voraussetzung, dass A 1F der Halbradius ist, fand er nämlich, dass das Doppelte des Zykloidentrilineums A 1F 1CA bzw. das gerade Segment M 1CAM gleich der Hälfte des im Erzeugerkreis beschriebenen regulären Sechsecks ist, wie Pascal in der Geschichte der ausgezeichneten Entdeckungen über die Zykloide erwähnt, die er auf einem kleinen Zettel zusammenfassend dargestellt hat. Seit der Zeit hat niemand, soweit ich weiß, einen anderen quod sciam aliam portionem solis rectis et curva cycloidis contentam absolute quadravit. Mihi vero idem, quod tot alia praebuit theorema prop. 7. et 8. expressum, hunc quoque transitum dedit generalem a segmentis ad retortas, adeoque absolutam ac sane simplicissimam segmenti obliqui quadraturam, quod dimidio quadrato radii aequari ostensum est. Quae hoc loco memoratu non indigna videbantur.

Beweis von Satz XIII, 2. Variante

Spatium ADE 1CA componitur ex segmento cycloidis, AE 1CA, triangulo ALE, et triangulo ALD idem spatium ADE 1CA componitur ex retorta A 1BLE 1CA et quadrante ADL 1BA. Ergo summa illorum aequatur summae horum, segmentum scilicet cum duobus triangulis, retortae cum quadrante. Retorta autem aequatur duplo cycloidis segmento per prop. 12. et triangulum ALE, (cujus altitudo radius AD, basis arcus quadrantis, LE vel A 1BL) aequatur quadranti[;] fit ergo aequatio inter segmentum cycloidis, (triangulum ALE id est) quadrantem et triangulum ALD ab una parte; et (retortam id est per prop. 12.) duplum segmentum cycloidis cum quadrante ab altera parte; auferendo utrobique quadrantem et segmentum cycloidis semel, fiet triangulum ALD aequale segmento cycloidis AE 1CA. Quod erat demonstrandum.

Scholium

Retortam A 1BLE 1CA aequari quadrato radii AD, propositio est quae diserte habetur ..... aequale esse. Unde diversarum plane methodorum consensus patet.[67]

avec la ligne droite. Sa proposition est que la ligne de la Roulette est quadruple de son axe, dont il a envoyé l'énonciation sans demonstration. Et comme il est le premier qui l'a produite, c'est sans doute à luy que l'honneur de la premiere invention appartient." [PO VIII, 204]

[67] In der stark Cartesianisch geprägten Logik von Port-Royal von Arnauld und Nicole gelten mehrere Beweise eines Satzes als Schwäche. Ziel einer mathematischen Darstellung gemäß dieser „Ein-Beweis-Tradition" ist es, zu jedem Satz die einfachste Folge logischer Schritte seiner Ableitung anzugeben. Demgegenüber folgt Leibniz in dieser Schrift Autoren wie Grégoire de Saint-Vincent, für die mehrere, auf unterschiedlichen Methoden beruhende Beweise nicht nur das Vertrauen in ein Resultat sondern durch verschiedene Sichtweisen das Problemverständnis insgesamt erhöhen [Dhombres 1993].

Teil absolut quadriert, der von Geraden allein und der Zykloidenkurve umspannt ist. Mir aber hat dasselbe in Satz 7 und 8 ausgedrückte Theorem, das soviel anderes lieferte, auch diesen allgemeinen Übergang von den Segmenten zu den Retorten gegeben, und deshalb eine absolute und in der Tat einfachste Quadratur eines schiefen Segments, von dem gezeigt wurde, dass es gleich der Hälfte des Quadrates vom Radius ist. Diese Dinge schienen nicht unwürdig, an dieser Stelle erwähnt zu werden.

Beweis von Satz XIII, 2. Variante

Die Fläche ADE 1CA wird zusammengesetzt aus dem Zykloidensegment AE 1CA, dem Dreieck ALE und dem Dreieck ALD; dieselbe Fläche ADE 1CA wird zusammengesetzt aus der Retorte A 1BLE 1CA und dem Viertelkreis ADL 1BA. Also gleicht die Summe jener der Summe dieser, nämlich das Segment mit den beiden Dreiecken der Retorte mit dem Viertelkreis. Die Retorte aber gleicht dem doppelten Zykloidensegment nach Satz 12, und das Dreieck ALE (dessen Höhe der Radius AD und Basis der Bogen des Viertelkreises, LE oder A 1BL, ist) gleicht dem Viertelkreis. Es entsteht also eine Gleichung zwischen dem Zykloidensegment, (dem Dreieck ALE, d. h.) dem Viertelkreis und dem Dreieck ALD auf der einen Seite, und (der Retorte, d. h. nach Satz 12) dem doppelten Zykloidensegment mit dem Viertelkreis auf der anderen Seite. Indem man auf beiden Seiten zugleich den Viertelkreis und das Zykloidensegment abzieht, wird das Dreieck ALD gleich dem Zykloidensegment AE 1CA werden. Das war zu beweisen.

Scholium

Dass die Retorte A 1BLE 1CA dem Quadrat des Radius' AD gleicht, ist ein Satz, den man wohl formuliert erhält ..... gleich sein. Daher ist die Übereinstimmung völlig verschiedener Methoden klar.

Index

Personenverzeichnis